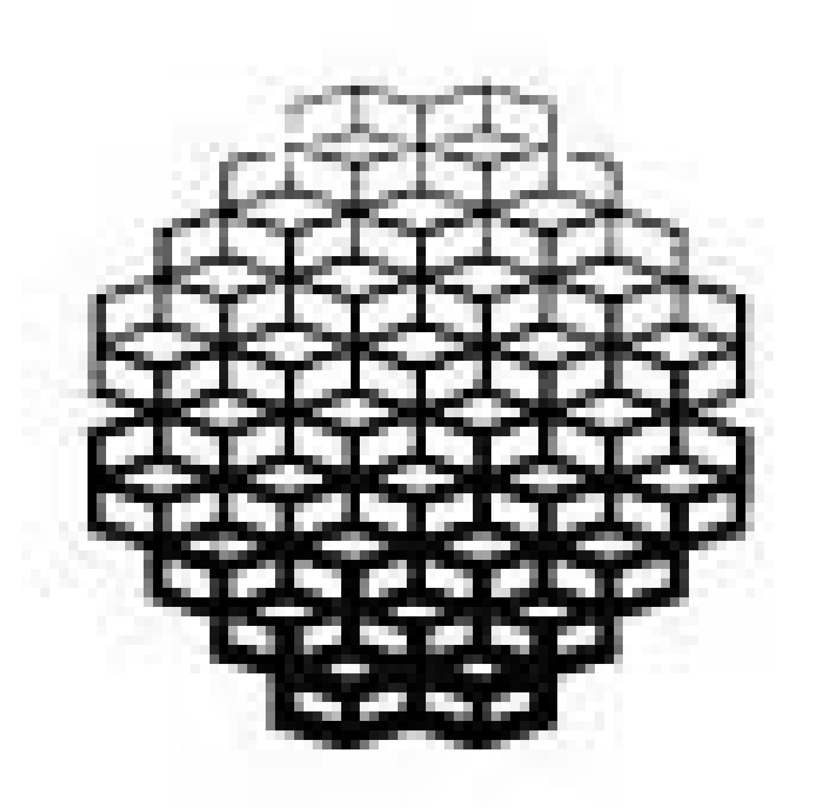
Smarandache 问题研究

易 媛 亢小玉 著



High American Press

2006

Smarandache 问题研究

易媛

西安交通大学理学院

亢小玉

西北大学学报编辑部

High American Press

2006

This book can be ordered in a paper bound reprint from:

Books on Demand
ProQuest Information & Learning
(University of Microfilm International)
300 N. Zeeb Road
P.O. Box 1346, Ann Arbor
MI 48106-1346, USA
Tel.: 1-800-521-0600 (Customer Service)
http://wwwlib.umi.com/bod/basic

Many books can be downloaded from the following
Digital Library of Science:
http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/eBooks-otherformats.htm

Peer Reviewers:
Faculty and students
Department of Mathematics
Northwest University
Xi'an
Shaanxi
P. R. China.

ISBN: 1-59973-016-2

前 言

数论是一门最古老的数学学科, 古老到她可以追逆到远古时代! 但是数论又很年轻, 年轻到我们至今仍然无法确定整数的许多简单性质. 一些古老的数论问题被解决, 但是更多的新问题会出现. 正是对这些问题的不断研究才促进了数论及现代数学的长足发展.

美籍罗马尼亚著名数论专家F.Smarandache教授曾提出了许多关于特殊数列、算术函数的问题与猜想. 1991年, 他在美国研究出版社出版了《只有问题，没有解答》一书. 该书中, F.Smarandache教授提出了105个关于特殊数列、算术函数等未解决的数学问题及猜想. 随着这些问题的提出, 许多学者对此进行了深入的研究, 并获得了不少具有重要理论价值的研究成果!

本书正是根据M.Perez博士以及我的导师张文鹏教授的建议, 将目前中国学者关于F.Smarandache问题的部分研究成果汇编成册, 其主要目的在于向读者全面而又系统的介绍一些与数论研究有关的F.Smarandache问题的现状, 主要包括数论函数的均值、恒等式与不等式、无穷级数、特殊函数方程的解等内容. 在前五章的介绍中着重体现了数论方法在解决实际问题的强大作用, 使初学者能够初步掌握运用数论方法解决实际问题的能力. 特别需要指出的是, 在第六章中我们还列举了一些国外学者对F.Smarandache问题在其它领域如几何学、逻辑学等领域中的研究成果, 从而开拓读者的视野, 引导和激发读者对这些领域的研究兴趣.

本书的编写过程中, 得到了国家自然科学基金(编号:10601039)的部分资助, 在此表示感谢! 还要特别感谢杨海、任冬梅、陆亚明等博士为本书的编写付出的艰苦努力. 最后对我的导师张文鹏教授详细地审阅全书并提出许多宝贵意见致以深深的谢意!

编者

2006年10月

目录

第一章　数论函数及其均值(I)

数论，与数学的其它许多分支一样，经常涉及到实数或复数序列. 在数论中，这样的序列称为数论函数. 许多数论或组合数学中的问题均可化为一些数论函数，研究这些数论函数的性质是数论的一个重要内容. 有许多数论函数的取值是很不规则的，例如$\phi(n)$，$d(n)$，$\mu(n)$ 等等. 但是这些数论函数的均值$\frac{1}{x}\sum\limits_{n\leq x} f(n)$ 往往具有良好的特性. 本章主要介绍几个Smarandache 问题中所提出的数论函数，并利用初等方法来研究这些数论函数的均值及算术性质.

1.1　p 次幂原数函数$S_p(n)$

1.1.1　引言

定义1.1.1　设p 为素数，n为任意正整数，$S_p(n)$ 表示$S_p(n)!$ 能被p^n 整除的最小正整数. 例如，$S_3(1)=3$，$S_3(2)=6$，$S_3(3)=S_3(4)=9$，$\cdots\cdots$.

定义1.1.2　对任意给定的正整数k，令$a_k(n)$ 是n 的k 次根整数部分，即就是$a_k(n) = \left[n^{\frac{1}{k}}\right]$，其中$[x]$ 是小于或等于x的最大整数.例如，$a_k(1) = 1$，$\cdots$，$a_k(2^k-1)=1$，$a_k(2^k)=2$，$\cdots$.

定义1.1.3　设p 为素数，n 为任意给定的正整数，我们定义:

$$a_p(n)=m \quad 当 \quad p^m \mid n \quad 且 \quad p^{m+1} \dagger n.$$

在文献[1]中第49个问题，第68个问题及第80个问题里F.Smarandach 教授建议研究序列$\{S_p(n)\}$，$\{a_k(n)\}$，$\{a_p(n)\}$ 的一些性质. 本节中，我们主要利用初等方法对p次幂原数函数的均值以及它与k 次根的正整数部分、$a_p(n)$ 的混合均值的分布性质进行讨论. 对这些问题的研究, 可以帮助我们来计算Smarandache 函数, 以及了解算术函数之间的紧密联系.

1.1.2　$S_p(n)$ 的渐近性质

首先, 对任意给定素数p及正整数n, 如果$n = a_1p^{\alpha_1} + a_2p^{\alpha_2} + \cdots + a_sp^{\alpha_s}$ 且$\alpha_s > \alpha_{s-1} > \cdots > \alpha_1 \geq 0$ 其中$1 \leq a_i \leq p-1$ $(i=1,2,\cdots,s)$，设

$$a(n,p)=a_1+a_2+\cdots+a_s.$$

关于数论函数$a(n,p)$，我们有以下两个简单引理:

引理1.1.1　对任意整数$n\geq 1$，我们有恒等式

$$\alpha_p(n)\equiv\alpha(n)\equiv\sum_{i=1}^{+\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]=\frac{1}{p-1}(n-a(n,p)),$$

其中$[x]$ 表示不超过x 的最大正整数.

证明: 由$[x]$ 的性质可知

$$\begin{aligned}\left[\frac{n}{p^i}\right] &= \left[\frac{a_1p^{\alpha_1}+a_2p^{\alpha_2}+\cdots+a_sp^{\alpha_s}}{p^i}\right]\\ &= \begin{cases}\sum\limits_{j=k}^{s} a_jp^{\alpha_j-i}, & \text{如果}\quad \alpha_{k-1}<i\le\alpha_k\\ 0, & \text{如果}\quad i\ge\alpha_s.\end{cases}\end{aligned}$$

由此, 我们有

$$\begin{aligned}\alpha(n) &\equiv \sum_{i=1}^{+\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]=\sum_{i=1}^{+\infty}\left[\frac{a_1p^{\alpha_1}+a_2p^{\alpha_2}+\cdots+a_sp^{\alpha_s}}{p^i}\right]\\ &= \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{\alpha_j}a_jp^{\alpha_j-k}=\sum_{j=1}^{s}a_j(1+p+p^2+\cdots+p^{\alpha_j-1})\\ &= \sum_{j=1}^{s}a_j\cdot\frac{p^{\alpha_j}-1}{p-1}=\frac{1}{p-1}\sum_{j=1}^{s}(a_jp^{\alpha_j}-a_j)\\ &= \frac{1}{p-1}(n-a(n,p)).\end{aligned}$$

引理1.1.1 得证.

引理1.1.2 对任意给定素数p 及正整数n且$p|n$, 则有估计

$$a(n,p)\le\frac{p}{\ln p}\ln n.$$

证明: 令$n=a_1p^{\alpha_1}+a_2p^{\alpha_2}+\cdots+a_sp^{\alpha_s}$ 且$\alpha_s>\alpha_{s-1}>\cdots>\alpha_1\ge 0$ 其中$1\le a_i\le p-1$ $(i=1,2,\cdots,s)$. 则根据$a(n,p)$的定义可知

$$a(n,p)=\sum_{i=1}^{s}a_i\le\sum_{i=1}^{s}(p-1)=(p-1)s. \tag{1-1}$$

另一方面, 利用数学归纳法我们很容易推出不等式:

$$n=a_1p^{\alpha_1}+a_2p^{\alpha_2}+\cdots+a_sp^{\alpha_s}\ge a_sp^{\alpha_s},$$

或者

$$s\le\frac{\ln(n/a_s)}{\ln p}\le\frac{\ln n}{\ln p}. \tag{1-2}$$

结合(1-1)及(1-2)式，我们立刻得到估计

$$a(n,p)\le\frac{p}{\ln p}\ln n.$$

引理1.1.2 得证.

定理1.1.1 对任意给定素数p 及正整数n, 则有渐近公式

$$S_p(n) = (p-1)n + O\left(\frac{p}{\ln p} \cdot \ln n\right).$$

证明: 对任意给定素数p及正整数n, 在p进制中令$S_p(n) = k = a_1 p^{\alpha_1} + a_2 p^{\alpha_2} + \cdots + a_s p^{\alpha_s}$ 且$\alpha_s > \alpha_{s-1} > \cdots > \alpha_1 \geq 0$. 则根据$S_p(n)$的定义可知$p^n | k!$及$p^n \dagger (k-1)!$, 于是$\alpha_1 \geq 1$. 注意到$k!$ 的标准因子分解式为

$$k! = \prod_{q \leq k} q^{\alpha_q(k)},$$

其中$\prod\limits_{q \leq k}$ 表示对所有小于或等于k 的素数求积，并且$\alpha_q(k) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{k}{q^i}\right]$. 由引理1.1.1 可以得到不等式

$$\alpha_p(k) - \alpha_1 < n \leq \alpha_p(k)$$

或者

$$\frac{1}{p-1}(k - a(k,p)) - \alpha_1 < n \leq \frac{1}{p-1}(k - a(k,p)).$$

即就是

$$(p-1)n + a(k,p) \leq k \leq (p-1)n + a(k,p) + (p-1)(\alpha_1 - 1).$$

结合这些不等式, 再根据引理1.1.2 可以得到渐近公式

$$k = (p-1)n + O\left(\frac{p}{\ln p} \ln k\right) = (p-1)n + O\left(\frac{p}{\ln p} \ln n\right).$$

这样就完成了定理1.1.1 的证明.

由定理1.1.1可以推出:

推论1.1.1 对任意正整数n, 则有

a) $\qquad S_2(n) = n + O(\ln n);$

b) $\qquad S_3(n) = 2n + O(\ln n).$

1.1.3 p 次幂原数和$a_k(n)$

引理1.1.3 设p 为素数，n 为任意正整数，则有

$$|S_p(n+1)-S_p(n)|=\begin{cases} p, & \text{如果} \quad p^n||m!, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中$S_p(n)=m$, $p^n \parallel m!$ 表示$p^n|m!$ 且$p^{n+1}\dagger m!$.

证明: 现在我们将分两种情况对问题进行讨论.

(i) 设$S_p(n)=m$，若$p^n \parallel m!$，于是有$p^n|m!$ 且$p^{n+1}\dagger m!$. 由$S_p(n)$ 的定义我们可得$p^{n+1}\dagger(m+1)!$, $p^{n+1}\dagger(m+2)!$, $\cdots$, $p^{n+1}\dagger(m+p-1)!$ 且$p^{n+1}|(m+p)!$, 因此$S_p(n+1)=m+p$, 那么我们可以推出

$$|S_p(n+1)-S_p(n)|=p. \tag{1-3}$$

(ii) $S_p(n)=m$, 若$p^n|m!$ 且$p^{n+1}|m!$, 则有$S_p(n+1)=m$, 因此

$$|S_p(n+1)-S_p(n)|=0. \tag{1-4}$$

综合(1-3) 和(1-4), 可以推出

$$|S_p(n+1)-S_p(n)|=\begin{cases} p, & \text{如果}p^n \parallel m!, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

引理1.1.3 得证.

在引理1.1.3 的基础上，本小节中主要讨论$\sum\limits_{n\le x}\frac{1}{p}\left|S_p(a_k(n+1))-S_p(a_k(n))\right|$ 的渐近性质, 其中的x 是正实数. 事实上, 本节证明了以下结论:

定理1.1.2 对任意的实数$x\ge 2$, 令p 为素数及n 为任意正整数, 则对任意给定的正整数k 有

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{p}\left|S_p(a_k(n+1))-S_p(a_k(n))\right|=x^{\frac{1}{k}}\cdot\left(1-\frac{1}{p}\right)+O_k\left(\frac{\ln x}{\ln p}\right),$$

其中O_k表示大O 常数仅与参数k 有关.

证明: 对任意的实数$x\ge 2$, 设M 为给定的正整数且满足$M^k\le x<(M+1)^k$，根据$S_p(n)$的定义及引理1.1.3 我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{n\le x}\frac{1}{p}\left|S_p(a_k(n+1))-S_p(a_k(n))\right| \\ =&\sum_{t=1}^{M-1}\left(\sum_{t^k\le n\le(t+1)^k-1}\frac{1}{p}\left|S_p(a_k(n+1))-S_p(a_k(n))\right|\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \sum_{M^k \le n \le x} \frac{1}{p} \left| S_p(a_k(n+1)) - S_p(a_k(n)) \right| \\
= & \sum_{t=1}^{M-1} \frac{1}{p} \left| S_p(t+1) - S_p(t) \right| + \sum_{M^k \le n \le x} \frac{1}{p} \left| S_p(a_k(n+1)) - S_p(a_k(n)) \right| \\
= & \sum_{t=1}^{M-1} \frac{1}{p} \left| S_p(t+1) - S_p(t) \right| \\
= & \sum_{\substack{t \le x^{\frac{1}{k}} \\ p^t \| m!}} 1 + O(1), \qquad (1\text{-}5)
\end{aligned}
$$

其中$S_p(t) = m$. 若$p^t \parallel m!$, 则有(参阅文献[2]中定理1.7.2)

$$
\begin{aligned}
t &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{m}{p^i} \right] = \sum_{i \le \log_p m} \left[\frac{m}{p^i} \right] \\
&= m \cdot \sum_{i \le \log_p m} \frac{1}{p^i} + O\left(\log_p m \right) \\
&= \frac{m}{p-1} + O\left(\frac{\ln m}{\ln p} \right). \qquad (1\text{-}6)
\end{aligned}
$$

利用(1-6)式, 可以推出

$$
m = (p-1)t + O\left(\frac{p \ln t}{\ln p} \right). \qquad (1\text{-}7)
$$

因此

$$
1 \le m \le (p-1) \cdot x^{\frac{1}{k}} + O_k\left(\frac{p \ln x}{\ln p} \right), \quad \text{当} \quad 1 \le t \le x^{\frac{1}{k}}.
$$

注意到对任意正整数t，若存在一个正整数m 使得$p^t \parallel m!$ 成立, 则有$p^t \parallel (m+1)!$, $p^t \parallel (m+2)!, \cdots, p^t \parallel (m+p-1)!$. 所以在区间$1 \le m \le (p-1) \cdot x^{\frac{1}{k}} + O_k\left(\frac{p \ln x}{\ln p} \right)$ 中有p 个m 使得$t = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \left[\frac{m}{p^i} \right]$ 成立.

由上式及式(1-5)，可得

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n \le x} \frac{1}{p} \left| S_p(a_k(n+1)) - S_p(a_k(n)) \right| \\
= & \sum_{\substack{t \le x^{\frac{1}{k}} \\ p^t \| m!}} 1 + O(1) \\
= & \frac{1}{p} \left((p-1) \cdot x^{\frac{1}{k}} + O_k\left(\frac{p \ln x}{\ln p} \right) \right) + O(1)
\end{aligned}
$$

$$= x^{\frac{1}{k}} \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right) + O_k\left(\frac{\ln x}{\ln p}\right).$$

于是完成了定理1.1.2 的证明.

1.1.4 p 次幂原数函数与$a_p(n)$

引理1.1.4 对任意给定的素数p 及任意实数$x \geq 1$, 我们有

$$\sum_{\alpha \leq x} \frac{\alpha^2}{p^\alpha} = \frac{p^2 + p}{(p-1)^3} + O\left(\frac{x^2}{p^x}\right).$$

证明: 首先, 我们来计算

$$u = \sum_{\alpha \leq n} \alpha^2 / p^\alpha.$$

注意到恒等式

$$\begin{aligned} u\left(1 - \frac{1}{p}\right) &= \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\alpha^2}{p^\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\alpha^2}{p^{\alpha+1}} \\ &= \frac{1}{p} - \frac{n^2}{p^{n+1}} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{(\alpha+1)^2 - \alpha^2}{p^{\alpha+1}} \\ &= \frac{1}{p} - \frac{n^2}{p^{n+1}} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{2\alpha+1}{p^{\alpha+1}}, \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} u\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 &= \left(\frac{1}{p} - \frac{n^2}{p^{n+1}} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{2\alpha+1}{p^{\alpha+1}}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &= \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{n^2 - n^2 p}{p^{n+2}} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{2\alpha+1}{p^{\alpha+1}} - \sum_{\alpha=2}^{n} \frac{2\alpha-1}{p^{\alpha+1}} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{n^2 - n^2 p}{p^{n+2}} + \sum_{\alpha=2}^{n-1} \frac{2}{p^{\alpha+1}} + \frac{n^2 - n^2 p - (2n-1)p}{p^{n+2}} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{2(p^{n-1} - 1)}{p^{n+1} - p^n} + \frac{n^2 - (n^2 + 2n - 1)p}{p^{n+2}}. \end{aligned}$$

所以我们有

$$u = \left(\frac{1}{p} + \frac{2(p^{n-1} - 1)}{p^{n+1} - p^n} + \frac{n^2 - (n^2 + 2n - 1)p}{p^{n+2}}\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2}$$

$$= \frac{p}{(p-1)^2} + \frac{2(p^{n-1}-1)}{p^{n-2}(p-1)^3} + \frac{n^2-(n^2+2n-1)p}{p^n(p-1)^2}.$$

于是我们立刻可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\le x}\frac{\alpha^2}{p^\alpha} &= \frac{p}{(p-1)^2}+\frac{2p}{(p-1)^3}+O\left(\frac{x^2}{p^x}\right)\\ &= \frac{p^2+p}{(p-1)^3}+O\left(\frac{x^2}{p^x}\right).\end{aligned}$$

引理1.1.4 证毕.

定理1.1.3 对任意给定的素数p 及任意实数$x\ge 1$, 则有渐近公式

$$\sum_{n\le x} a_p(S_p(n)) = \frac{p+1}{(p-1)^2}x + O\left(\ln^3 x\right).$$

证明: 根据$S_p(n)$和$a_p(n)$的定义, 容易推出

$$\begin{aligned}&\sum_{n\le x} a_p(S_p(n))\\
=&\sum_{\substack{m\le x\\ p^\alpha\| m}}\alpha^2=\sum_{\substack{p^\alpha m\le x\\ (p,m)=1}}\alpha^2=\sum_{p^\alpha\le x}\alpha^2\sum_{\substack{m\le x/p^\alpha\\ (p,m)=1}}1\\
=&\sum_{p^\alpha\le x}\alpha^2\sum_{m\le x/p^\alpha}\ \sum_{d|(m,p)}\mu(d)\\
=&\sum_{p^\alpha\le x}\alpha^2\sum_{d|p}\mu(d)\sum_{t\le x/p^\alpha}1\\
=&\sum_{p^\alpha\le x}\alpha^2\left(\sum_{t\le x/p^\alpha}1-\sum_{t\le x/p^{\alpha+1}}1\right)\\
=&\sum_{p^\alpha\le x}\alpha^2\left(\frac{x}{p^\alpha}-\frac{x}{p^{\alpha+1}}+O(1)\right)\\
=&x\left(\sum_{\alpha\le\ln x/\ln p}\frac{\alpha^2}{p^\alpha}-\sum_{\alpha\le\ln x/\ln p}\frac{\alpha^2}{p^{\alpha+1}}\right)+O\left(\sum_{\alpha\le\ln x/\ln p}\alpha^2\right)\\
=&\left(1-\frac{1}{p}\right)x\sum_{\alpha\le\ln x/\ln p}\frac{\alpha^2}{p^\alpha}+O\left(\ln^3 x\right)\\
=&\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{p^2+p}{(p-1)^3}+O\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right)\right)x+O\left(\ln^3 x\right)\\
=&\frac{p+1}{(p-1)^2}x+O\left(\ln^3 x\right).\end{aligned}$$

于是就完成了定理1.1.3 的证明.

取$p=2,3$, 由定理1.1.3 即可得到下面的推论.

推论1.1.2 对任意实数$x\geq 1$, 则有渐近公式

$$\sum_{n\leq x} a_2(S_2(n)) = 3x + O\left(\ln^3 x\right),$$
$$\sum_{n\leq x} a_3(S_3(n)) = x + O\left(\ln^3 x\right).$$

1.2 Smarandache Ceil 函数

1.2.1 引言

定义1.2.1 对一个固定的正整数k 及任意正整数n, Smarandache Ceil 函数的定义如下:

$$S_k(n) = \min\{m \in N : n | m^k\}.$$

这个函数是由F.Smarandache 教授提出来的. 关于这个函数, Ibstedt (参阅文献[3]) 提出以下性质:

性质1.2.1

$$(\forall a, b \in N)\ (a,b)=1 \Rightarrow S_k(a\cdot b) = S_k(a)\cdot S_k(b),$$

性质1.2.2

$$S_k(p^\alpha) = p^{\lceil \frac{\alpha}{k} \rceil}$$

其中p 为素数, $\lceil x \rceil$ 表示大于x 的最小整数.

由性质1.2.1 可知, $S_k(n)$ 是一个可乘函数. 因此, 由$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为n 的素数分解, $S_k(n)$ 显然有如下性质:

$$S_k(n) = S_k(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}) = p_1^{\lceil \frac{\alpha_1}{k} \rceil} p_2^{\lceil \frac{\alpha_2}{k} \rceil} \cdots p_r^{\lceil \frac{\alpha_r}{k} \rceil}. \tag{1-8}$$

定义1.2.2 算术函数$\Omega(n)$ 的定义如下:

$$\Omega(n) = \Omega(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r.$$

本小节中, 主要讨论关于$\Omega(n)$和Smarandache Ceil 函数, 以及$S_k(n!)$的均值分布性质.

1.2.2 $S_k(n!)$ 分布性质

引理1.2.1 设n 为一任意的正整数, 则有

$$\sum_{p\leq n} \frac{1}{\ln p} = \frac{n}{\ln^2 n} + O\left(\frac{n}{\ln^3 n}\right), \tag{1-9}$$

其中p 表示不同的素数.

证明: 根据Able 恒等式(参阅文献[4]) 我们有

$$\sum_{p\leq n}\frac{1}{\ln p}=\pi(n)\frac{1}{\ln n}+\int_2^n\pi(t)\frac{1}{t\ln^2 t}dt,$$

其中$\pi(n)$ 表示不超过n 的素数个数. 注意到

$$\pi(n)=\frac{n}{\ln n}+O\left(\frac{n}{\ln^2 n}\right),$$

因此,

$$\sum_{p\leq n}\frac{1}{\ln p}=\frac{n}{\ln^2 n}+O\left(\frac{n}{\ln^3 n}\right).$$

引理1.2.1 得证.

引理1.2.2 设m为一任意的正整数, 我们有渐近公式

$$\sum_{p\leq m}\frac{1}{p}=\ln\ln n+A+O\left(\frac{1}{\ln n}\right), \tag{1-10}$$

其中A是一个可计算的常数.

证明: (参阅文献[5]).

定理1.2.1 设k为一个给定的正整数, 对任意实数$x\geq 3$, 我们有渐近公式

$$\Omega(S_k(n!))=\frac{n}{k}(\ln\ln n+C)+O\left(\frac{n}{\ln n}\right),$$

其中C是一个可计算的常数.

证明: 设

$$n!=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}.$$

根据(1-8) 及函数$\Omega(n)$的完全可加性, 我们有

$$\Omega(S_k(n!))=\Omega\left(p_1^{\lceil\frac{\alpha_1}{k}\rceil}p_2^{\lceil\frac{\alpha_2}{k}\rceil}\cdots p_r^{\lceil\frac{\alpha_r}{k}\rceil}\right)=\sum_{i=1}^{r}\left\lceil\frac{\alpha_i}{k}\right\rceil. \tag{1-11}$$

显然

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p_i^j}\right],\quad i=1,2,\cdots,r.$$

注意到若$p^j>n$, 则有$\left[\frac{n}{p^j}\right]=0$, 从而由引理1.2.1可得

$$\Omega(S_k(n!)) \;=\; \sum_{p\leq n}\left[\frac{1}{k}\sum_{j\leq\frac{\ln n}{\ln p}}\left[\frac{n}{p_i^j}\right]\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p\leq n}\left[\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\left[\frac{\ln n}{\ln p}\right]}\frac{n}{p^j}+O\left(\frac{\ln n}{\ln p}\right)\right]\\
&= \sum_{p\leq n}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\left[\frac{\ln n}{\ln p}\right]}\frac{n}{p^j}+O\left(\frac{\ln n}{\ln p}\right)\right)+O\left(\frac{n}{\ln n}\right)\\
&= \frac{n}{k}\left(\sum_{p\leq n}\frac{1}{p-1}-\sum_{p\leq n}\frac{1}{p^{\left[\frac{\ln n}{\ln p}\right]}(p-1)}\right)+O\left(\frac{n}{\ln n}\right)\\
&= \frac{n}{k}\left(\sum_{p\leq n}\frac{1}{p-1}\right)+O\left(\frac{n}{\ln n}\right)\\
&= \frac{n}{k}\left(\sum_{p\leq n}\frac{1}{p}+\sum_{p\leq n}\frac{1}{p(p-1)}\right)+O\left(\frac{n}{\ln n}\right). \qquad (1\text{-}12)
\end{aligned}$$

因为

$$\sum_{p\leq n}\frac{1}{p(p-1)}=\sum_{p}\frac{1}{p(p-1)}-\sum_{p>n}\frac{1}{p(p-1)}=B+O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (1\text{-}13)$$

其中$B=\sum\limits_{p}\frac{1}{p(p-1)}$为一常数. 综合(1-12), (1-13) 及引理1.2.2 我们有

$$\Omega(S_k(n!))=\frac{n}{k}(\ln\ln n+C)+O\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

于是完成了定理1.2.1 的证明.

1.2.3 Smarandache Ceil 函数与$\Omega(n)$

引理1.2.3 设$\omega(n)=\omega(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r})=r$, 对任意实数$x\geq 3$, 我们有

$$\sum_{n\leq x}\omega(n)=x\ln\ln x+Ax+O\left(\frac{x}{\ln x}\right),$$

其中$A=\gamma+\sum\limits_{p}\left(\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right)$, γ 是欧拉常数.

证明: (参阅文献[6]).

引理1.2.4 对任意实数$x\geq 3$, 我们有估计式

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in\mathcal{A}}}\Omega(n)\ll x^{\frac{1}{k+1}+\epsilon},$$

其中$\mathcal{A}$ 表示$(k+1)$-*full* 数的集合, ϵ 为任意给定的正数.

证明: 首先, 我们定义算术函数$a(n)$如下:

$$a(n) = \begin{cases} 1, & \text{如果 n 是}(k+1)\text{-full 数}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

根据欧拉积公式我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{(k+1)s}} + \frac{1}{p^{(k+2)s}} + \cdots \right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{(k+1)s}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}\right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{(k+1)s}}\right) \left(\frac{p^{(k+1)s}}{p^{(k+1)s}+1} + \frac{p^s}{(p^{(k+1)s}+1)(p^s-1)}\right) \\ &= \frac{\zeta((k+1)s)}{\zeta(2(k+1)s)} \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p^{(k+1)s}+1)(p^s-1)}\right),\end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$是Riemann zeta-函数. 由Perron公式(参阅文献[2]) 我们可得

$$\begin{aligned}&\sum_{n\le x} a(n) = \sum_{\substack{n\le x\\ n\in\mathcal{A}}} 1 \\ &= \frac{6(k+1)x^{\frac{1}{k+1}}}{\pi^2} \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{k+1}}-1)}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2(k+1)}+\epsilon}\right).\end{aligned}$$

故有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in\mathcal{A}}} \Omega(n) \ll x^{\frac{1}{k+1}+\epsilon}.$$

引理1.2.4 得证.

定理1.2.2 设k 为一个给定的正整数, 对任意实数$x \ge 3$, 则有

$$\sum_{n\le x} \Omega(S_k(n)) = x\ln\ln x + Ax + O\left(\frac{x}{\ln x}\right),$$

其中$A = \gamma + \sum_p \left(\ln\left(1-\frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right)$, γ 是欧拉常数, $\sum_p$ 表示对所有素数求和.

证明: 设

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}.$$

根据(1-8) 及函数$\Omega(n)$ 的可加性我们有

$$\Omega(S_k(n)) = \Omega\left(p_1^{\lceil \frac{\alpha_1}{k} \rceil} p_2^{\lceil \frac{\alpha_2}{k} \rceil} \cdots p_r^{\lceil \frac{\alpha_r}{k} \rceil}\right) = \sum_{i=1}^{r} \left\lceil \frac{\alpha_i}{k} \right\rceil. \tag{1-14}$$

显然$\lceil \frac{\alpha_i}{k} \rceil \geq 1$，故有

$$\sum_{i=1}^{r} \left\lceil \frac{\alpha_i}{k} \right\rceil \geq \sum_{i=1}^{r} 1 = \omega(n). \tag{1-15}$$

另一方面，若存在某一素数p_i 使得$p_i^{k+1} \mid n$，则$\lceil \frac{\alpha_i}{k} \rceil \geq 2$. 设$n = n_1 n_2$，其中$(n_1, n_2) = 1$ 且n_1 是一个完全$k+1$ 次幂数. 即若$p \mid n_1$，则有$p^{k+1} \mid n_1$. 那么我们很容易得出以下不等式

$$\sum_{i=1}^{r} \left\lceil \frac{\alpha_i}{k} \right\rceil \leq \omega(n) + \Omega(n_1). \tag{1-16}$$

由(1-15) 及(1-16), 我们有

$$\omega(n) \leq \sum_{i=1}^{r} \left\lceil \frac{\alpha_i}{k} \right\rceil \leq \omega(n) + \Omega(n_1).$$

所以可得

$$\sum_{n \leq x} \omega(n) \leq \sum_{n \leq x} \Omega(S_k(n)) = \sum_{n \leq x} \sum_{i=1}^{r} \left\lceil \frac{\alpha_i}{k} \right\rceil \leq \sum_{n \leq x} \omega(n) + \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in \mathcal{A}}} \Omega(n), \tag{1-17}$$

其中$\mathcal{A}$ 表示完全$(k+1)$ 次幂数的集合. 综合引理1.2.3, 引理1.2.4及(1-17), 则有

$$\sum_{n \leq x} \Omega(S_k(n)) = x \ln\ln x + Ax + O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

这样就完成了定理1.2.2的证明.

1.3 简单数函数

1.3.1 引言

定义1.3.1 设n为正整数，如果n 的所有真因子的乘积小于或等于n, 则称n为简单数.

例如: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, \cdots$ 均为简单数. 本小节中，我们设A为所有简单数的集合.

在文献[7]中, Jason Earls 定义新的Smarandache序列$sopfr(n)$如下:

定义1.3.2 设 $sopfr(n)$ 表示能整除n的素因子之和(包括重数). 即

$$sopfr(n) = \sum_{p|n} p.$$

例如:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$sopfr(n)$	0	2	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17	8

本小节中，我们将利用初等方法给出简单数序列的一些性质，及当$n \in A$时$sopfr(n)$的分布性质.

1.3.2 简单数序列

首先，对正整数n, 令$p_d(n)$表示n的所有正因子乘积, 则$p_d(n) = \prod\limits_{d|n} d$, $q_d(n)$表示n的所有正真因子乘积, 即$q_d(n) = \prod\limits_{d|n, d<n} d$.

引理1.3.1 若n为简单数，则n 的取值只能为$n = p$，$n = p^2$，$n = p^3$或$n = pq$这四种情况，其中p与q是不同的素数.

证明: 由$p_d(n)$的定义我们可知

$$p_d(n) = \prod_{d|n} d = \prod_{d|n} \frac{n}{d}.$$

于是

$$p_d^2(n) = \prod_{d|n} d \times \prod_{d|n} \frac{n}{d} = \prod_{d|n} n = n^{d(n)}. \tag{1-18}$$

其中$d(n) = \sum\limits_{d|n} 1$. 利用(1-18) 我们很容易得到$p_d(n) = n^{\frac{d(n)}{2}}$ 及

$$q_d(n) = \prod_{d|n, d<n} d = \frac{\prod\limits_{d|n} d}{n} = n^{\frac{d(n)}{2}-1}. \tag{1-19}$$

由简单数的定义及(1-19), 我们推出$n^{\frac{d(n)}{2}-1} \leq n$. 因此

$$d(n) \leq 4.$$

这个不等式仅在$n = p$, $n = p^2$, $n = p^3$或$n = pq$成立.

引理1.3.1 得证.

引理1.3.2 对任意给定的实数$x > 1$, 则有渐近公式

$$\sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{1}{p} \ln\ln \frac{x}{p} = (\ln\ln x)^2 + B_1 \ln\ln x + B_2 + O\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right),$$

其中B_1, B_2 是常数.

证明: 显然

$$\begin{aligned}\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p}\ln\ln\frac{x}{p} &= \sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p}\ln(\ln x-\ln p)\\ &= \sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p}\left(\ln\ln x+\ln\left(1-\frac{\ln p}{\ln x}\right)\right)\\ &= \ln\ln x\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p}+\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p}\ln\left(1-\frac{\ln p}{\ln x}\right). \qquad (1\text{-}20)\end{aligned}$$

利用

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\ln\ln x+C_1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right). \qquad (1\text{-}21)$$

我们得到

$$\begin{aligned}\ln\ln x\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p} &= \ln\ln x\left(\ln\ln\sqrt{x}+C_1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)\\ &= (\ln\ln x)^2+B_1\ln\ln x+O\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right). \qquad (1\text{-}22)\end{aligned}$$

如果$m>2$, 注意到$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)$, 那么

$$\begin{aligned}\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{\ln^m p}{p} &= \int_2^{\sqrt{x}}\frac{\ln^m y}{y}d\pi(y)\\ &= \frac{\ln^m\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\pi(\sqrt{x})+O(1)-\int_2^{\sqrt{x}}\pi(y)\frac{m\ln^{m-1}y-\ln^m y}{y^2}dy\\ &= \frac{\ln^m\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln^2\sqrt{x}}\right)\right)\\ &\quad -\int_2^{\sqrt{x}}\left(\frac{y}{\ln y}+\frac{y}{\ln^2 y}+O\left(\frac{y}{\ln^3 y}\right)\right)\frac{m\ln^{m-1}y-\ln^m y}{y^2}dy\\ &= \frac{\ln^{m-1}x}{2^{m-1}}+O\left(\frac{\ln^{m-2}x}{2^{m-2}}\right)\\ &\quad +\int_2^{\sqrt{x}}\left[\frac{\ln^{m-1}y}{y}-(m-1)\frac{\ln^{m-2}y}{y}+O\left((1-m)\frac{\ln^{m-3}y}{y}\right)\right]dy\\ &= \frac{\ln^{m-1}x}{2^{m-1}}+O\left(\frac{\ln^{m-2}x}{2^{m-2}}\right)+\frac{\ln^m x}{m2^m}-\frac{\ln^{m-1}x}{2^{m-1}}\\ &\quad +O\left(\frac{(1-m)\ln^{m-2}x}{(m-2)2^{m-2}}\right)\\ &= \frac{1}{m2^m}\ln^m x+O\left(\frac{1}{2^{m-2}(2-m)}\ln^{m-2}x\right). \qquad (1\text{-}23)\end{aligned}$$

由(1-23) 及级数$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m2^m}$的收敛性, 我们有

$$\begin{aligned}
& -\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p}\ln\left(1-\frac{\ln p}{\ln x}\right) \\
= & \sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p}\left(\frac{\ln p}{\ln x}+\frac{\ln^2 p}{2\ln^2 x}+\cdots+\frac{\ln^m p}{m\ln^m x}+\cdots\right) \\
= & \frac{1}{\ln x}\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{\ln p}{p}+\frac{1}{2\ln^2 x}\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{\ln^2 p}{p}+\cdots+\frac{1}{m\ln^m x}\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{\ln^m p}{p}+\cdots \\
= & \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{2}\ln x+O(1)\right)+\cdots \\
& +\frac{1}{m\ln^m x}\left(\frac{1}{m2^m}\ln^m x+O\left(\frac{\ln^{m-2}x}{2^{m-2}(2-m)}\right)\right)+\cdots \\
= & B_2+O\left(\frac{1}{\ln x}\right), \qquad (1\text{-}24)
\end{aligned}$$

其中我们用到渐近公式$\sum\limits_{p\le\sqrt{x}}\frac{\ln p}{p}=\frac{1}{2}\ln x+O(1)$ 及幂级展式$\ln(1-x)=-(x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^m}{m}+\cdots)$. 综合(1-20), (1-22) 及(1-24) 我们很容易得到

$$\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p}\ln\ln\frac{x}{p}=(\ln\ln x)^2+B_1\ln\ln x+B_2+O\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right).$$

引理1.3.2得证.

定理1.3.1 对任意给定的实数$x>1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}}\frac{1}{n}=(\ln\ln x)^2+B_1\ln\ln x+B_2+O\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right),$$

其中B_1, B_2 是常数.

证明: 由引理1.3.1 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}}\frac{1}{n} &= \sum_{p\le x}\frac{1}{p}+\sum_{p^2\le x}\frac{1}{p^2}+\sum_{p^3\le x}\frac{1}{p^3}+\sum_{\substack{pq\le x\\ p\ne q}}\frac{1}{pq} \\
&= \sum_{p\le x}\frac{1}{p}+\sum_{p^3\le x}\frac{1}{p^3}+\sum_{pq\le x}\frac{1}{pq}. \qquad (1\text{-}25)
\end{aligned}$$

利用(1-21) 及引理1.3.2 我们得到

$$\sum_{pq\le x}\frac{1}{pq}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p}\sum_{q\le x/p}\frac{1}{q}-\left(\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p}\right)\left(\sum_{q\le\sqrt{x}}\frac{1}{q}\right)\\
&= 2\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p}\left(\ln\ln\frac{x}{p}+C_1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)-\left(\ln\ln\sqrt{x}+C_1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)^2\\
&= 2\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p}\ln\ln\frac{x}{p}+2C_1\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p}+O\left(\frac{1}{\ln x}\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p}\right)\\
&\quad -\left((\ln\ln x)^2+C_2\ln\ln x+C_3+O\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right)\right)\\
&= (\ln\ln x)^2+C_4\ln\ln x+C_5+O\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right).
\end{aligned}\tag{1-26}$$

综合(1-21), (1-25) 及(1-26), 且注意到$\sum\limits_{p^3\le x}\frac{1}{p^3}$是收敛的, 我们立刻推出

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}}\frac{1}{n}=(\ln\ln x)^2+B_1\ln\ln x+B_2+O\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right).$$

这样就完成了定理1.3.1 的证明.

定理1.3.2 设实数$x>1$, 则我们有

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}}\frac{1}{\phi(n)}=(\ln\ln x)^2+C_1\ln\ln x+C_2+O\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right),$$

其中C_1, C_2 是常数, $\phi(n)$ 是*Euler* 函数.

定理1.3.3 对任意给定的实数$x>1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}}\frac{1}{\sigma(n)}=(\ln\ln x)^2+D_1\ln\ln x+D_2+O\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right),$$

其中D_1, D_2 是常数, $\sigma(n)$ 是除数函数.

证明: 现在我们将证明定理1.3.2及定理1.3.3. 由Euler函数及除数函数的定义与性质, 应用引理1.3.1我们有

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}}\frac{1}{\phi(n)}=\sum_{p\le x}\frac{1}{p-1}+\sum_{p^2\le x}\frac{1}{p^2-p}+\sum_{p^3\le x}\frac{1}{p^3-p^2}+\sum_{\substack{pq\le x\\ p\ne q}}\frac{1}{(p-1)(q-1)}$$

及

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}}\frac{1}{\sigma(n)}=\sum_{p\le x}\frac{1}{p+1}+\sum_{p^2\le x}\frac{1}{p^2+p+1}+\sum_{p^3\le x}\frac{1}{p^3+p^2+p+1}+\sum_{\substack{pq\le x\\ p\ne q}}\frac{1}{(p+1)(q+1)}.$$

注意到$\frac{1}{p\pm1}=\frac{1}{p}\mp\frac{1}{p(p\pm1)}$ 及$\sum\limits_{p}\frac{1}{p(p\pm1)}$ 是收敛的, 于是利用证明定理1.3.1的方法我们可以推出

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}}\frac{1}{\phi(n)}=(\ln\ln x)^2+C_1\ln\ln x+C_2+O\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right)$$

及

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}}\frac{1}{\sigma(n)}=(\ln\ln x)^2+D_1\ln\ln x+D_2+O\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right).$$

这样我们就完成了定理1.3.2与定理1.3.3的证明.

1.4 Smarandache Lucas 基底及其计数函数

一般情况下, 对于整数$n>0$著名的Lucas序列$\{L_n\}$与Fibonacci 序列$\{F_n\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 是由二阶线性递归序列

$$L_{n+2}=L_{n+1}+L_n \qquad 与 \qquad F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

所定义, 其中$L_0=2$, $L_1=1$, $F_0=0$ 及$F_1=1$. 这些序列在理论与应用数学的研究中起到非常重要的作用, 因此关于L_n与F_n的性质被许多学者所研究. 例如, R.L. Duncan[8]与L. Kuipers[9]证明了$\log F_n$ 是关于模1一致分布的. H.London, R. Finkelstein 在[10]中研究了完全次幂的Fibonacci与Lucas数的性质. W.P.Zhang[11]获得了包含Fibonacci 数的一些恒等式.

这里, 我们引入一种新的与Lucas 数有关的计数函数$a(m)$, 并且利用初等方法给出其均值的精确计算公式. 首先我们考虑Smarandache广义基底, F.Smarandache 教授定义自然数集上的无穷广义基底: $1=g_0<g_1<\cdots<g_k<\cdots$. 他证明了任意正整数$N$都可以用Smarandache广义基底唯一表示为:

$$N=\sum_{i=0}^{n}a_ig_i, \qquad 并且 \qquad 0\le a_i\le\left[\frac{g_{i+1}-1}{g_i}\right] \quad (i=0,1,\cdots,n),$$

其中$[x]$ 表示数x 的整数部分. 显然, $a_n\ge1$. 这里他所采用的方法式: 当$g_n\le N<g_{n+1}$, 则$N=g_n+r_1$; 如果$g_m\le r_1<g_{m+1}$, 那么$r_1=g_m+r_2(m<n)$, 如此进行下去直到的余数$r_j=0$ 为止.

这一基底对分拆问题非常重要. 如果我们取g_i 为Lucas 序列, 那么我们可以得到一个特殊的基底, 为叙述简便, 我们称之为Smarandache Lucas基底. 于是, 对任意正整数m在Smarandache Lucas基底中可以唯一的表示为:

$$m=\sum_{i=0}^{n}a_iL_i, \qquad 并且 \qquad a_i=0 \ 或 \ 1. \tag{1-27}$$

即就是, 任意正整数均可以被表示为一个关于Lucas 数的和式. 现在, 对于整数$m=\sum\limits_{i=0}^{n}a_iL_i$, 我们定义计数函数$a(m)=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 本小节给出函数$a(m)$ 的分布性质, 并对均值

$$A_r(N)=\sum_{n<N}a^r(n),\qquad r=1,\ \ 2. \tag{1-28}$$

给出一个计算公式.

定理1.4.1 对任意正整数k, 我们有

$$A_1(L_k)=\sum_{n<L_k}a(n)=kF_{k-1}$$

及

$$A_2(L_k)=\frac{1}{5}[(k-1)(k-2)L_{k-2}+5(k-1)F_{k-2}+7(k-1)F_{k-3}+3F_{k-1}].$$

证明: (归纳法) 对于$k=1,\ 2$, 则$A_1(L_1)=A_1(1)=0$, $A_1(L_2)=A_1(3)=2$, 并且$F_0=0$, $2F_1=2$. 所以, 恒等式

$$A_1(L_k)=\sum_{n<L_k}a(n)=kF_{k-1} \tag{1-29}$$

在$k=1,\ 2$时成立. 假设(1-29)对所有$k\leq m-1$都成立. 于是, 由归纳假设我们有

$$\begin{aligned}
A_1(L_m) &= \sum_{n<L_{m-1}}a(n)+\sum_{L_{m-1}\leq n<L_m}a(n)\\
&= A_1(L_{m-1})+\sum_{0\leq n<L_{m-2}}a(n+L_{m-1})\\
&= A_1(L_{m-1})+\sum_{0\leq n<L_{m-2}}(a(n)+1)\\
&= A_1(L_{m-1})+L_{m-2}+\sum_{n<L_{m-2}}a(n)\\
&= A_1(L_{m-1})+A_1(L_{m-2})+L_{m-2}\\
&= (m-1)F_{m-2}+(m-2)F_{m-3}+L_{m-2}\\
&= m(F_{m-2}+F_{m-3})-F_{m-2}-2F_{m-3}+L_{m-2}\\
&= mF_{m-1}-F_{m-1}-F_{m-3}+L_{m-2}\\
&= mF_{m-1},
\end{aligned}$$

这里我们用到恒等式$F_{m-1}+F_{m-3}=L_{m-2}$. 即就是, 当$k=m$时(1-29)式成立. 这样就完成了定理1.4.1中第一部分的证明.

现在我们来证明定理1.4.2中的第二部分. 对于$k=1, 2$, 注意到$1=F_1=F_0+F_{-1}$或者$F_{-1}=1$, 则$A_2(L_1)=A_2(1)=0$, $A_2(L_2)=A_2(3)=2$并且

$$\frac{1}{5}[(k-1)(k-2)L_{k-2}+5(k-1)F_{k-2}+7(k-1)F_{k-3}+3F_{k-1}]=\begin{cases}0, & \text{如果 } k=1;\\ 2, & \text{如果 } k=2.\end{cases}$$

因此, 当$k=1, 2$时, 恒等式

$$A_2(L_k)=\frac{1}{5}[(k-1)(k-2)L_{k-2}+5(k-1)F_{k-2}+7(k-1)F_{k-3}+3F_{k-1}] \quad (1\text{-}30)$$

成立. 假设(1-30)对所有$k\leq m-1$都成立. 注意到$L_{m-1}+2L_{m-2}=5F_{m-1}$及$F_{m-1}+2F_{m-2}=L_{m-1}$, 则$A_2(L_1)=A_2(1)=0$, $A_2(L_2)=A_2(3)=2$则由归纳假设与定理1.4.1的第一部分结果可以得到

$$\begin{aligned}
A_2(L_m) &= \sum_{n<L_{m-1}} a^2(n)+\sum_{L_{m-1}\geq n<L_m} a^2(n)\\
&= A_2(L_{m-1})+\sum_{0\leq n<L_{m-2}} a^2(n+L_{m-1})\\
&= A_2(L_{m-1})+\sum_{0\leq n<L_{m-2}} (a(n)+1)^2\\
&= A_2(L_{m-1})+\sum_{0\leq n<L_{m-2}} (a^2(n)+2a(n)+1)\\
&= A_2(L_{m-1})+\sum_{n<L_{m-2}} a^2(n)+2\sum_{n<L_{m-2}} a(n)+L_{m-2}\\
&= A_2(L_{m-1})+A_2(L_{m-2})+2A_1(L_{m-2})+L_{m-2}\\
&= \frac{1}{5}[(m-2)(m-3)L_{m-3}+5(m-2)F_{m-3}+7(m-2)F_{m-4}+3F_{m-2}]\\
&\quad +\frac{1}{5}[(m-3)(m-4)L_{m-4}+5(m-3)F_{m-4}+7(m-3)F_{m-5}+3F_{m-3}]\\
&\quad +2(m-2)F_{m-3}+L_{m-2}\\
&= \frac{1}{5}[(m-1)(m-2)L_{m-3}+5(m-1)F_{m-3}+7(m-1)F_{m-4}+3F_{m-2}]\\
&\quad +\frac{1}{5}[(m-1)(m-2)L_{m-4}+5(m-1)F_{m-4}+7(m-1)F_{m-5}+3F_{m-3}]\\
&\quad -\frac{1}{5}[2(m-1)L_{m-3}+(4m-10)L_{m-4}+5F_{m-3}+7F_{m-4}+10F_{m-4}\\
&\quad +14F_{m-5}]+2(m-2)F_{m-3}+L_{m-2}\\
&= \frac{1}{5}[(m-1)(m-2)L_{m-2}+5(m-1)F_{m-2}+7(m-1)F_{m-3}+3F_{m-1}]\\
&\quad -\frac{1}{5}[2(m-2)(L_{m-3}+2L_{m-4})-2L_{m-4}+5(F_{m-3}+2F_{m-4})\\
&\quad +7(F_{m-4}+2F_{m-5})+2(m-2)F_{m-3}+L_{m-2}\\
&= \frac{1}{5}[(m-1)(m-2)L_{m-2}+5(m-1)F_{m-2}+7(m-1)F_{m-3}+3F_{m-1}]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{5}[10(m-2)F_{m-3}-2L_{m-4}+5L_{m-3}+7L_{m-4} \\
& +2(m-2)F_{m-3}+L_{m-2} \\
= \ & \frac{1}{5}[(m-1)(m-2)L_{m-2}+5(m-1)F_{m-2}+7(m-1)F_{m-3}+3F_{m-1}].
\end{aligned}
$$

这就说明当$k=m$ 时, (4)式成立. 综上所述, 定理1.4.1得证.

定理1.4.2 对任意正整数N, 在*Smarandache Lucas*基底中设$N=L_{k_1}+L_{k_2}+\cdots+L_{k_s}$且$k_1>k_2>\cdots>k_s$. 则有

$$A_1(N)=A_1(L_{k_1})+N-L_{k_1}+A_1(N-L_{k_1})$$

及

$$A_2(N)=A_2(L_{k_1})+N-L_{k_1}+A_2(N-L_{k_1})+2A_1(N-L_{k_1}).$$

证明: 由于$N=L_{k_1}+L_{k_2}+\cdots+L_{k_s}$, 则根据定理1.4.1我们有

$$
\begin{aligned}
A_1(N) &= \sum_{n<L_{k_1}}a(n)+\sum_{L_{k_1}\le n<N}a(n) \\
&= A_1(L_{k_1})+\sum_{L_{k_1}\le n<N}a(n) \\
&= A_1(L_{k_1})+\sum_{0\le n<N-L_{k_1}}a(n+L_{k_1}) \\
&= A_1(L_{k_1})+\sum_{0\le n<N-L_{k_1}}(a(n)+1) \\
&= A_1(L_{k_1})+A_1(N-L_{k_1})+N-L_{k_1}.
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
A_2(N) &= \sum_{n<L_{k_1}}a^2(n)+\sum_{L_{k_1}\le n<N}a^2(n) \\
&= A_2(L_{k_1})+\sum_{0\le n<N-L_{k_1}}a^2(n+L_{k_1}) \\
&= A_2(L_{k_1})+\sum_{0\le n<N-L_{k_1}}(a^2(n)+2a(n)+1) \\
&= A_2(L_{k_1})+N-L_{k_1}+A_2(N-L_{k_1})+2A_1(N-L_{k_1}).
\end{aligned}
$$

这样我们就证明了定理1.4.2的第一部分结果.

可以利用对s 的数学归纳法以及递推公式给出定理1.4.2中第二部分结果的证明. 这样我们就完成了定理1.4.2的证明.

更进一步,

$$A_1(N)=\sum_{i=1}^{s}[k_iF_{k_i-1}+(i-1)L_{k_i}].$$

对于任意正整数$r \geq 3$, 利用我们的方法可以给出$A_r(L_k)$ 一个精确的计算公式. 但是, 在这种情况下计算是非常复杂的.

1.5 Smarandache函数与$a_k(n)$

定义1.5.1 *Smarandache函数$S(n)$定义如下:*

$$S(n) = \min\{m : m \in N, n|m!\}.$$

本节中, 我们给出Smarandache函数在正整数的k次根取整序列$\{a_k(n)\}$(见定义1.3.1)上的分布性质. 这里, 我们令$p(n)$表示n的最大素因子.

引理1.5.1 *若$p(n) > \sqrt{n}$, 则有$S(n) = p(n)$.*

证明: 设$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} p(n)$, 则可得

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} < \sqrt{n}$$

于是,

$$p_i^{\alpha_i} | p(n)!, \qquad i = 1, 2, \cdots, r.$$

故可得$n|p(n)!$，但$p(n) \dagger (p(n)-1)!$，因此$S(n) = p(n)$.

引理1.5.1 得证.

引理1.5.2 *设$x \geq 1$ 是任意实数, 我们有*

$$\sum_{n \leq x} S(n) = \frac{\pi^2 x^2}{12 \ln x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

证明: 显然有

$$\sum_{n \leq x} S(n) = \sum_{\substack{n \leq x \\ p(n) > \sqrt{n}}} S(n) + \sum_{\substack{n \leq x \\ p(n) \leq \sqrt{n}}} S(n). \tag{1-31}$$

根据Euler 求和公式我们很容易得出(1-31) 右端第二项的估计:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ p(n) \leq \sqrt{n}}} S(n) &\ll \sum_{n \leq x} \sqrt{n} \ln n \\ &= \int_1^x \sqrt{t} \ln t dt + \int_1^x (t - [t])(\sqrt{t} \ln t)' dt + \sqrt{x} \ln x (x - [x]) \\ &\ll x^{\frac{3}{2}} \ln x. \end{aligned} \tag{1-32}$$

下面我们来计算(1-32)右端第一项. 由引理1.5.1我们可得

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ p(n) > \sqrt{n}}} S(n) = \sum_{\substack{np \leq x \\ p > \sqrt{np}}} S(n) = \sum_{\substack{n \leq \sqrt{x} \\ \sqrt{x} < p \leq \frac{x}{n}}}$$

$$= \sum_{n\le\sqrt{x}} \sum_{\sqrt{x}<p\le\frac{x}{n}} p. \tag{1-33}$$

设$\pi(x)$表示小于或等于x的素数个数. 注意到

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right),$$

根据Abel恒等式可得

$$\begin{aligned}\sum_{\sqrt{x}<p\le\frac{x}{n}} p &= \pi\left(\frac{x}{n}\right)\frac{x}{n} - \pi(\sqrt{x})\sqrt{x} - \int_{\sqrt{x}}^{\frac{x}{n}} \pi(t)dt \\ &= \frac{x^2}{n^2\ln x} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{n^2\ln x} + O\left(\frac{x^2}{n^2\ln^2 x}\right) \\ &= \frac{x^2}{2n^2\ln x} + O\left(\frac{x^2}{n^2\ln^2 x}\right). \end{aligned} \tag{1-34}$$

因为

$$\sum_{n\le\sqrt{x}} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) + O\left(\frac{1}{x}\right), \tag{1-35}$$

综合(1-31)—(1-35), 可以推出引理1.5.2的结果.

引理1.5.2 得证.

引理1.5.3 对任意的正整数k 和非负整数i, 则有

$$\sum_{t\le x^{\frac{1}{k}}-1} t^i S(t) = \frac{\pi^2 x^{\frac{i+2}{k}}}{6(i+2)k\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{i+2}{k}}}{\ln^2 x}\right).$$

证明: 应用Abel恒等式, 结合引理1.5.2, 可以推出

$$\begin{aligned}\sum_{t\le x^{\frac{1}{k}}-1} t^i S(t) &= (x^{\frac{1}{k}}-1)^i \sum_{t\le x^{\frac{1}{k}}-1} S(t) - i\int_1^{x^{\frac{1}{k}}-1} \left(\sum_{l\le t} S(l)\right) t^{i-1}dt \\ &= \frac{\pi^2 x^{\frac{i+2}{k}}}{12k\ln x} - \frac{i\pi^2}{12}\int_1^{x^{\frac{1}{k}}-1} \frac{t^{i+1}}{\ln t}dt + O\left(\frac{x^{\frac{i+2}{k}}}{\ln^2 x}\right) \\ &= \frac{\pi^2 x^{\frac{i+2}{k}}}{6(i+2)k\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{i+2}{k}}}{\ln^2 x}\right). \end{aligned}$$

引理1.5.3 得证.

定理1.5.1 对任意的实数$x \ge 3$, 则有

$$\sum_{n\le x} S(a_k(n)) = \frac{\pi^2 x^{1+\frac{1}{k}}}{6(k+1)\ln x} + O\left(\frac{x^{1+\frac{1}{k}}}{\ln^2 x}\right).$$

证明: 首先, 对任意实数$x \geq 1$, 设M 为一个给定的正整数使得

$$M^k \leq x < (M+1)^k.$$

则我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} S(a_k(n)) &= \sum_{t=1}^{M-1} \sum_{t^k \leq n < (t+1)^k} S(a_k(n)) + \sum_{M^k \leq n < x} S(a_k(n)) \\
&= \sum_{t=1}^{M-1} [(t+1)^k - t^k] S(t) + \sum_{M^k \leq n < x} S(M) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{i}{k} \sum_{t \leq x^{\frac{1}{k}-1}} t^i S(t) + O\left(x^{\frac{1}{k}}\right)
\end{aligned}$$

再根据引理1.5.3我们可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} S(a_k(n)) &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{i}{k} \left(\frac{\pi^2 x^{\frac{i+2}{k}}}{6(i+2)k \ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{i+2}{k}}}{\ln^2 x}\right)\right) + O\left(x^{\frac{1}{k}}\right) \\
&= \frac{\pi^2 x^{1+\frac{1}{k}}}{6(k+1)\ln x} + O\left(\frac{x^{1+\frac{1}{k}}}{\ln^2 x}\right).
\end{aligned}$$

于是完成了定理1.5.1的证明.

1.6 Smarandache简单函数的可加类似

定义1.6.1 *Smarandache简单函数$S_p(n)$定义为: 满足$p^n | m!$的最小正整数$m \in N^+$. 即*

$$S_p(n) = \min\{m : m \in N, p^n | m!\}.$$

在文献[12]里, 作者Jozsef Sandor提出Smarandache简单函数的加法类似如下:

定义1.6.2 设

$$S_p(x) = \min\ \{m \in N : p^x \leq m!\},\ x \in (1, \propto),$$

和

$$S_p^*(x) = \max\ \{m \in N : m! \leq p^x\},\ x \in [1, \propto)$$

则称$S_p(x)$ 与$S_p^*(x)$ 为*Smarandache*简单函数的加法类似.

显然当$x \in ((m-1)!,\ m!]$时有$S_p(x) = m$, 其中的$m \geq 2$ (因为$0! = 1!$ 故$m = 1$时函数无定义), 因此, 这个函数定义在$x \geq 1$. 这里，主要给出Smarandache 简单函数的加法类似$S_p(x)$ 与$S_p^*(x)$ 的渐近性质.

定理1.6.1 设对任意实数$x \geq 2$, 有渐近公式

$$S_p(x) = \frac{x\ln p}{\ln x} + O\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}\right).$$

证明: 根据$S_p(x)$ 的定义, 我们可得$(m-1)! < p^x \leq m!$. 在上式两端同时取对数，我们有

$$\sum_{i=1}^{m-1} \ln i < x\ln p \leq \sum_{i=1}^{m} \ln i. \tag{1-36}$$

再由欧拉求和公式可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \ln i &= \int_1^m \ln t dt + \int_1^m (t-[t])(\ln t)^{'} \ln t dt \\ &= m\ln m - m + O(\ln m), \end{aligned} \tag{1-37}$$

及

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m-1} \ln i &= \int_1^{m-1} \ln t dt + \int_1^{m-1} (t-[t])(\ln t)' dt \\ &= m\ln m - m + O(\ln m). \end{aligned} \tag{1-38}$$

综合(1-36)-(1-38) 我们很容易推出

$$x\ln p = m\ln m - m + O(\ln m). \tag{1-39}$$

所以

$$m = \frac{x\ln p}{\ln m - 1} + O(1). \tag{1-40}$$

同理, 我们同时在式(1-40)两端取对数, 则

$$\ln m = \ln x + O(\ln\ln m), \tag{1-41}$$

及

$$\ln\ln m = O(\ln\ln x). \tag{1-42}$$

因此, 由式(1-40)-(1-42) 我们可得

$$S_p(x) = \frac{x\ln p}{\ln x + O(\ln\ln m) - 1} + O(1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x\ln p}{\ln x} + x\ln p\left(\frac{O(\ln\ln m)}{\ln x(\ln x + O(\ln\ln m) - 1)}\right) \\ &= \frac{x\ln p}{\ln x} + O\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}\right). \end{aligned}$$

于是完成了定理1.6.1 的证明.

1.7 Smarandache伪5倍数序列

定义1.7.1 对任意一个正整数，如果将其各位数字进行置换包括恒等置换后所得数字是5的倍数，那么这个数就称为伪5倍数.

例如: $0,5,10,15,\ 20,25,30,35,40,50,51,52,\cdots$ 就是伪5倍数. 设A表示所有伪5倍数的集合. 在文献[1]的第78个问题里，Smarandache 教授建议研究伪5倍数序列的性质. 本小节中利用初等方法研究了这个序列的均值性质.

定理1.7.1 对任意实数$x\geq 1$，我们有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leq x}} f(n) = \sum_{n\leq x} f(n) + O\left(Mx^{\frac{\ln 8}{\ln 10}}\right),$$

其中$M = \max\limits_{1\leq n\leq x}\{|f(n)|\}$.

证明: 首先, 设$10^k\leq x<10^{k+1}$ $(k\geq 1)$, 则有$k\leq \log x<k+1$. 根据集合A的定义, 我们可以推出不属于集合A且小于等于x的数的个数最多有8^{k+1}个. 事实上, 在这些数中有8个一位数, 即: $1,2,3,4,6,7,8,9$, 有8^2 个两位数, $\cdots$, 有8^k个k位数. 所以说不属于集合A且小于等于x的数的个数最多有$8+8^2+\cdots+8^k=\frac{8}{7}(8^k-1)\leq 8^{k+1}$个. 因为

$$8^k\leq 8^{\log x} = \left(8^{\log_8 x}\right)^{\frac{1}{\log_8 10}} = (x)^{\frac{1}{\log_8 10}} = x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}}.$$

所以我们有$8^k = O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}}\right)$.

设M表示$|f(n)|$ $(n\leq x)$ 的上界, 则有

$$\sum_{\substack{n\notin A\\ n\leq x}} f(n) = O\left(Mx^{\frac{\ln 8}{\ln 10}}\right).$$

于是,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n\in A\\ n\leq x}} f(n) &= \sum_{n\leq x} f(n) - \sum_{\substack{n\notin A\\ n\leq x}} f(n) \\ &= \sum_{n\leq x} f(n) + O\left(Mx^{\frac{\ln 8}{\ln 10}}\right). \end{aligned}$$

这样就完成了定理1.7.1的证明.

推论1.7.1 对任意实数$x \geq 1$, 我们有

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leq x}} d(n) = x\ln x + (2\gamma - 1)x + O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}+\epsilon}\right),$$

其中$d(n)$ 是*Dirichlet* 除数函数，γ 是欧拉常数，ϵ 为任意给定的正数.

证明: 在定理1.7.1中取$f(n) = d(n)$, 并注意到(参阅文献[4])

$$\sum_{n\leq x} d(n) = x\ln x + (2\gamma - 1)x + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right),$$

以及估计式

$$d(n) \ll x^{\epsilon}, \qquad (\text{对所有的}1 \leq n \leq x),$$

就可以得出推论1.7.1.

推论1.7.2 对任意实数$x \geq 1$, 则有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leq x}} \Omega(n) = x\ln\ln x + Bx + O\left(\frac{x}{\ln x}\right),$$

其中$\Omega(n)$ 表示n 的所有素因子的个数, B 是一个可计算的常数.

证明: 在定理1.7.1中取$f(n) = \Omega(n)$, 并注意到(参阅文献[6])

$$\sum_{n\leq x} \Omega(n) = x\ln\ln x + Bx + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

以及估计式

$$\Omega(n) \ll x^{\epsilon}, \qquad (\text{对所有的}1 \leq n \leq x),$$

就可以得出推论1.7.2.

1.8 素因子最大指数序列$\{e_p(n)\}$(I)

定义1.8.1 设p为素数, $e_p(n)$ 表示在所有整除n的素因子中的最大指数，则称$\{e_p(n)\}$素因子最大指数序列.

令$\alpha(n,p) = \sum\limits_{k\leq n} e_p(k)$. 在文献[1]的第68个问题中, F.Smarandach 教授建议研究序列$\{e_p(n)\}$的性质. 因为$e_p(n)$与$n!$的标准因子分解式之间有着密切的关系, 所以研究这一问题是十分有意义的. 本节中, 主要利用初等方法来讨论均值$\sum\limits_{p\leq n} \alpha(n,p)$的性质.

定理1.8.1 对任意素数p及固定正整数n, 则存在渐近公式

$$\sum_{p\leq n} \alpha(n,p) = n\ln n + cn + c_1\frac{n}{\ln n} + c_2\frac{n}{\ln^2 n} + \cdots + c_k\frac{n}{\ln^k n} + O\left(\frac{n}{\ln^{k+1}}\right),$$

其中k 是任意给定正整数, $c_i(i=1,2,\cdots)$均为可计算的常数.

证明: 首先, 我们将所研究和式分解为两部分:

$$\sum_{p\le n}\alpha(n,p)=\sum_{p\le\sqrt{n}}\alpha(n,p)+\sum_{\sqrt{n}<p\le n}\alpha(n,p). \tag{1-43}$$

对于第一部分和式, 根据引理1.1.1我们有

$$\begin{aligned}\sum_{p\le\sqrt{n}}\alpha(n,p) &= \sum_{p\le\sqrt{n}}\frac{1}{p-1}(n-\alpha(n,p))\\ &= n\sum_{p\le\sqrt{n}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p(p-1)}\right)-\sum_{p\le\sqrt{n}}\frac{\alpha(n,p)}{p-1}\\ &= n\left(\sum_{p\le\sqrt{n}}\frac{1}{p}+\sum_{p}\frac{1}{p(p-1)}+O\left(\sum_{m>\sqrt{n}}\frac{1}{m^2}\right)\right)-\sum_{p\le\sqrt{n}}\frac{\alpha(n,p)}{p-1}\\ &= n\left(\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{n}}\frac{1}{x}d\pi(x)+A+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)-\sum_{p\le\sqrt{n}}\frac{\alpha(n,p)}{p-1}, \end{aligned}\tag{1-44}$$

其中$\pi(x)$所有不大于x的素数的个数. 注意到渐近公式

$$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+a_1\frac{x}{\ln^2 x}+\cdots+a_k\frac{x}{\ln^k x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right) \tag{1-45}$$

及

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{n}}\frac{1}{x}d\pi(x)=\frac{\pi(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}+\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{n}}\frac{\pi(x)}{x^2}dx\\ =\ &\frac{1}{\ln\sqrt{n}}+\frac{a_2}{\ln^2\sqrt{n}}+\cdots+\frac{a_k}{\ln^k\sqrt{n}}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}\sqrt{n}}\right)+\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{n}}\frac{1}{x\ln x}dx\\ &+a_2\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{n}}\frac{1}{x\ln^2 x}dx+\cdots+a_{k+1}\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{n}}\frac{1}{x\ln^{k+1}x}dx+O\left(\frac{1}{\ln^{k+1}n}\right)\\ =\ &\frac{a_{11}}{\ln n}+\frac{a_{12}}{\ln^2 n}+\cdots+\frac{a_{1k}}{\ln^k n}+\ln\ln n+B+\frac{a_{21}}{\ln n}+\frac{a_{22}}{\ln^2 n}\\ &+\cdots+\frac{a_{2k}}{\ln^k n}+O\left(\frac{1}{\ln^{k+1}n}\right)\\ =\ &\ln\ln n+B+\frac{a_{31}}{\ln n}+\frac{a_{32}}{\ln^2 n}+\cdots+\frac{a_{3k}}{\ln^k n}+O\left(\frac{1}{\ln^{k+1}n}\right). \end{aligned}\tag{1-46}$$

利用引理1.1.2我们有

$$\sum_{p\le\sqrt{n}}\frac{\alpha(n,p)}{p-1}\le\sum_{p\le\sqrt{n}}\frac{\ln n}{\ln p}=\ln n\sum_{p\le\sqrt{n}}\frac{1}{\ln p}\le\ln n\sum_{p\le\sqrt{n}}1\le\sqrt{n}\ln n. \tag{1-47}$$

综合(1-44), (1-46)及(1-47)式可以得到

$$\sum_{p\le\sqrt{n}}\alpha(n,p) = n\ln\ln n + c_0 n + a_{31}\frac{n}{\ln n} + a_{32}\frac{n}{\ln^2 n} + \cdots + a_{3k}\frac{n}{\ln^k n} + O\left(\frac{n}{\ln^{k+1} n}\right) \qquad (1\text{-}48)$$

对于第二部分和式, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\sqrt{n}<p\le n}\alpha(n,p) &= \sum_{\sqrt{n}<p\le n}\sum_{i=1}^{+\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right] = \sum_{\sqrt{n}<p\le n}\left[\frac{n}{p}\right] \\ &= \sum_{\sqrt{n}<p\le n}\sum_{m\le\frac{n}{p}}1 = \sum_{m\le\sqrt{n}}\sum_{\sqrt{n}<p\le\frac{n}{m}}1 \\ &= \sum_{m\le\sqrt{n}}\left(\pi(\frac{n}{m}) - \pi(\sqrt{n})\right) \\ &= \sum_{m\le\sqrt{n}}\pi(\frac{n}{m}) - [\sqrt{n}]\pi(\sqrt{n}). \qquad (1\text{-}49)\end{aligned}$$

应用Euler求和公式以及幂级展式可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{m\le\sqrt{n}}\frac{1}{m(\ln n-\ln m)^r} &= \sum_{m\le\sqrt{n}}\frac{1}{m\ln^r n(1-\frac{\ln m}{\ln n})^r} \\ &= \sum_{s=0}^{+\infty}\sum_{m\le\sqrt{n}}\frac{\binom{r-1+s}{r-1}\ln^s m}{m\ln^{s+r} n} \\ &= \sum_{s=0}^{+\infty}\binom{r-1+s}{r-1}\left(\sum_{m\le\sqrt{n}}\frac{\ln^s m}{m\ln^{s+r} n}\right) \\ &= \sum_{s=0}^{+\infty}\frac{\binom{r-1+s}{r-1}}{\ln^{s+r} n}\left(\frac{\ln^{s+1} n}{(s+1)2^{s+1}} + d_{s+1} + O\left(\frac{\ln^s n}{2^s\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= \sum_{i=r-1}^{k}\frac{d_{1i}}{\ln^i n} + O\left(\frac{\ln^s n}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

由此及(1-45)式, 我们可得

$$\begin{aligned}&\sum_{m\le\sqrt{n}}\pi(\frac{n}{m}) \\ &= \sum_{m\le\sqrt{n}}\left(\frac{\frac{n}{m}}{\ln(\frac{n}{m})} + a_2\frac{\frac{n}{m}}{\ln^2(\frac{n}{m})} + \cdots + a_{k+1}\frac{\frac{n}{m}}{\ln^{k+1}(\frac{n}{m})} + O\left(\frac{\frac{n}{m}}{\ln^{k+2}(\frac{n}{m})}\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n\sum_{m\le\sqrt{n}}\left(\frac{1}{m(\ln n-\ln m)}+a_2\frac{1}{m(\ln n-\ln m)^2}+\cdots\right.\\
&\qquad\left.+a_{k+1}\frac{1}{m(\ln n-\ln m)^{k+1}}+O\left(\frac{1}{m(\ln n-\ln m)^{k+2}}\right)\right)\\
&= n\left(b_0+\frac{b_1}{\ln n}+\frac{b_2}{\ln^2 n}+\cdots+\frac{b_k}{\ln^k n}+O\left(\frac{1}{\ln^{k+1} n}\right)\right)\\
&= b_0 n+b_1\frac{n}{\ln n}+b_2\frac{n}{\ln^2 n}+\cdots+b_k\frac{n}{\ln^k n}+O\left(\frac{n}{\ln^{k+1} n}\right) \qquad (1\text{-}50)
\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}
[\sqrt{n}]\pi(\sqrt{n}) &= \frac{n}{\ln\sqrt{n}}+a_2\frac{n}{\ln^2\sqrt{n}}+\cdots+a_k\frac{n}{\ln^k\sqrt{n}}+O\left(\frac{n}{\ln^{k+1}\sqrt{n}}\right)\\
&= a_{41}\frac{n}{\ln n}+a_{42}\frac{n}{\ln^2 n}+\cdots+a_{4k}\frac{n}{\ln^k n}+O\left(\frac{n}{\ln^{k+1} n}\right). \qquad (1\text{-}51)
\end{aligned}$$

利用(1-49)—(1-51)式可得

$$\sum_{\sqrt{n}<p\le n}\alpha(n,p)=b_0n+a_{51}\frac{n}{\ln n}+a_{52}\frac{n}{\ln^2 n}+\cdots+a_{5k}\frac{n}{\ln^k n}+O\left(\frac{n}{\ln^{k+1} n}\right). \qquad (1\text{-}52)$$

综合(1-43), (1-48) 及(1-52) 式, 我们容易推出渐近公式

$$\sum_{p\le n}\alpha(n,p)=n\ln n+cn+c_1\frac{n}{\ln n}+c_2\frac{n}{\ln^2 n}+\cdots+c_k\frac{n}{\ln^k n}+O\left(\frac{n}{\ln^{k+1}}\right).$$

这样就完成了定理1.8.1的证明.

第二章 数论函数及其均值(II)

在第一章里，我们主要以初等方法为基础讨论一些数论函数的均值问题，但是对于许多数论问题仅仅以初等方法来研究是远远不够的. 早在1837年Dirichlet 为了证明在一个给定的算术级数里素数存在性问题，他超出整数的范围并引入解析的方法如极限和连续性，根据这个做法，他创建了称为解析数论的一个新的数学分枝的基础. 在解析数论里，实分析和复分析的概念和方法极限于与整数有关的问题. 之后解析方法在研究数论问题中发挥了强大的作用. 作为初学者，有必要了解基本的解析数论的方法，以及在具体问题中如何去应用解析方法. 本章中，我们主要介绍了使用解析方法研究一些具体问题，特别在于数论函数的均值问题中的解析方法.

2.1 k次补数与k次可加补数

2.1.1 引言

定义2.1.1 设$k\geq 2$ 为任意给定的正整数, 若$b_k(n)$是使$nb_k(n)$为一完全k次幂的最小正整数, 则称$b_k(n)$为n的k次补数.

定义2.1.2 设$k\geq 2$为任意给定的正整数, 若$a_k(n)$是指使$a_k(n)+n$为一个完全k次幂数的最小正整数, 则称$a_k(n)$为n的k次可加补数.

例如: 若$k=2$, 可得平方可加补数序列$\{a_2(n)\}$ $(n=1,2,\cdots)$: $0,2,1,0,4,3,2,1,0,6,5,4,3,2,1,0,7,\cdots$.

定义2.1.3 对于自然数$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_r^{\alpha_r}$, 我们定义$a_3(n)=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\cdots\cdot p_r^{\beta_r}$为立方剩余数, 其中$\beta_i=\min(2,\alpha_i), 1\leq i\leq r$.

在文献[1]的第64 个问题和第29 个问题里, F.Smarandache 教授建议我们研究立方剩余序列和k次补数序列的性质. 这里主要利用解析方法给出了序列$\{a_3(n)b_k(n)\}$ 与$\{a_k(n)\}$，以及这两个序列与Euler 函数或除数函数相互作用后新的序列的分布性质.

2.1.2 立方剩余数和k次补数

定理2.1.1 对任意实数$x\geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}a_3(n)b_k(n)=\frac{6x^{k+1}}{(k+1)\pi^2}R(k+1)+O\left(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中ε 为任意给定的正数, 且若$k=2$时有

$$R(k+1)=\prod_p\left(1+\frac{p^3+p}{p^7+p^6-p-1}\right),$$

若$k\geq 3$时有

$$R(k+1)=\prod_p\left(1+\sum_{j=2}^{k}\frac{p^{k-j+3}}{(p+1)p^{(k+1)j}}+\sum_{j=1}^{k}\frac{p^{k-j+3}}{(p+1)(p^{(k+1)(k+j)}-p^{(k+1)j})}\right).$$

证明: 设

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_3(n)b_k(n)}{n^s}.$$

根据欧拉积公式及$a_3(n)$和$b_k(n)$的定义, 当$k=2$时我们可得

$$\begin{aligned}
f(s) &= \prod_p\left(1+\frac{a_3(p)b_k(p)}{p^s}+\frac{a_3(p^2)b_k(p^2))}{p^{2s}}+\cdots\right)\\
&= \prod_p\left(1+\frac{1}{p^{s-2}}+p^2(\frac{1}{p^{2s}}+\frac{p}{p^{3s}})(\frac{1}{1-p^{-2s}})\right)\\
&= \frac{\zeta(s-k)}{\zeta(2(s-k))}\prod_p\left(1+\frac{p^s+p}{(p^{s-2}+1)(p^{2s}-1)}\right)
\end{aligned}$$

当$k\geq 3$时有

$$\begin{aligned}
f(s) &= \prod_p\left(1+\frac{a_3(p)b_k(p)}{p^s}+\frac{a_3(p^2)b_k(p^2))}{p^{2s}}+\cdots\right)\\
&= \prod_p\left(1+\frac{1}{p^{s-k}}+p^2\sum_{j=2}^{k}\frac{p^{k-j}}{p^{js}}+(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{ks}}})\sum_{j=1}^{k}\frac{p^{k-j+2}}{p^{(k+j)s}}\right)\\
&= \prod_p(1+\frac{1}{p^{s-k}})\left(1+\frac{p^{s-k}}{1+p^{s-k}}\left(\sum_{j=2}^{k}\frac{p^{k-j+2}}{p^{js}}+\sum_{j=1}^{k}\frac{p^{k-j+2}}{p^{(k+j)s}-p^{js}}\right)\right)\\
&= \frac{\zeta(s-k)}{\zeta(2(s-k))}\prod_p\left(1+\sum_{j=2}^{k}\frac{p^{s-j+2}}{(p^{s-k}+1)p^{js}}+\sum_{j=1}^{k}\frac{p^{s-j+2}}{(p^{s-k}+1)(p^{(k+j)s}-p^{js})}\right)
\end{aligned}$$

显然, 我们有不等式

$$|a_m(n)b_k(n)|\leq n^2,\qquad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m(n)b_k(n)}{n^\sigma}\right|<\frac{1}{\sigma-k-1},$$

其中$\sigma>k+1$是s的实部. 所以由Perron 公式(参见文献[2])可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leq x}\frac{a_m(n)b_k(n)}{n^{s_0}}\\
=\ &\frac{1}{2i\pi}\int_{b-iT}^{b+iT}f(s+s_0)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^bB(b+\sigma_0)}{T}\right)\\
&+O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min(1,\frac{\log x}{T})\right)+O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min(1,\frac{x}{||x||})\right),
\end{aligned}$$

其中N是距离x最近的整数, $\|x\| = |x-N|$. 取$s_0 = 0, b = k+2, T = x^{\frac{3}{2}}, H(x) = x^2$, $B(\sigma) = \frac{1}{\sigma-k-1}$ 则有

$$\sum_{n\leq x} a_m(n)b_k(n) = \frac{1}{2i\pi}\int_{k+2-iT}^{k+2+iT} \frac{\zeta(s-k)}{\zeta(2(s-k))}R(s)\frac{x^s}{s}ds + O(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

其中

$$R(s) = \begin{cases} \prod_p \left(1+\frac{p^s+p}{(p^{s-2}+1)(p^{2s}-1)}\right), & \text{当}k=2\text{ 时} \\ \prod_p \left(1+\sum_{j=2}^{k}\frac{p^{s-j+2}}{(p^{s-k}+1)p^{js}}+\sum_{j=1}^{k}\frac{p^{s-j+2}}{(p^{s-k}+1)(p^{(k+j)s}-p^{js})}\right), & \text{当}k\geq 3\text{ 时.}\end{cases}$$

我们将积分线从$s = k+2\pm iT$移到$s = k+\frac{1}{2}\pm iT$ $s = a\pm iT$来估计主项

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{k+2-iT}^{k+2+iT} \frac{\zeta(s-k)}{\zeta(2(s-k))}R(s)\frac{x^s}{s}ds + O(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

这时, 函数

$$f(s) = \frac{\zeta(s-k)x^s}{\zeta(2(s-k))s}R(s)$$

在$s = k+1$处有一个一阶极点, 留数为$\frac{x^{k+1}}{(k+1)\zeta(2)}R(k+1)$. 所以

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2i\pi}\left(\int_{k+2-iT}^{k+2+iT}+\int_{k+2+iT}^{k+\frac{1}{2}+iT}+\int_{k+\frac{1}{2}+iT}^{k+\frac{1}{2}-iT}+\int_{k+\frac{1}{2}-iT}^{k+2-iT}\right)\frac{\zeta(s-k)x^s}{\zeta(2(s-k))s}R(s)ds \\ = &\frac{x^{k+1}}{(k+1)\zeta(2)}R(k+1).\end{aligned}$$

容易得出估计式

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{k+2+iT}^{k+\frac{1}{2}+iT}+\int_{k+\frac{1}{2}-iT}^{k+2-iT}\right)\frac{\zeta(s-k)x^s}{\zeta(2(s-k))s}R(s)ds\right| \\ \ll &\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+2}\left|\frac{\zeta(\sigma-k+iT)}{\zeta(2(\sigma-k+iT))}R(s)\frac{x^2}{T}\right|d\sigma \ll \frac{x^{k+2}}{T} = x^{k+\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

和

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{k+\frac{1}{2}+iT}^{k+\frac{1}{2}-iT}\frac{\zeta(s-k)x^s}{\zeta(2(s-k))s}R(s)ds\right| \ll \int_0^T\left|\frac{\zeta(1/2+it)}{\zeta(1+2it)}\frac{x^{k+\frac{1}{2}}}{t}\right|dt \ll x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

由$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$我们可得

$$\sum_{n\leq x} a_3(n)b_k(n) = \frac{6x^{k+1}}{(k+1)\pi^2}R(k+1) + O\left(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

于是完成了定理2.1.1的证明.

定理2.1.2 设$\varphi(n)$为欧拉函数, 则对任意实数$x\geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\varphi(a_3(n)b_k(n))=\frac{6x^{k+1}}{(k+1)\pi^2}R^*(k+1)+O\left(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

其中当若$k=2$时有

$$R^*(k+1)=\prod_p\left(1+\frac{p^2+1}{p^6+2p^5+2p^4+2p^3+2p^2+2p+1}-\frac{1}{p^2+p}\right),$$

当$k\geq 3$时有

$$\begin{aligned}R^*(k+1) &= \prod_p\left(1-\frac{1}{p^2+p}+\sum_{j=2}^{k}\frac{p^{k-j+3}-p^{k-j+2}}{(p+1)p^{(k+1)j}}+\right.\\ &\left.+\sum_{j=1}^{k}\frac{p^{k-j+3}-p^{k-j+2}}{(p+1)(p^{(k+1)(k+j)}-p^{(k+1)j})}\right).\end{aligned}$$

定理2.1.3 设$\alpha>0$，$\sigma_\alpha(n)=\sum\limits_{d|n}d^\alpha$, 则对任意实数$x\geq 1$, 则有

$$\sum_{n\leq x}\sigma_\alpha(a_3(n)b_k(n))=\frac{6x^{k\alpha+1}}{(k\alpha+1)\pi^2}R(k\alpha+1)+O\left(x^{k\alpha+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中当$k=2$时有

$$R(k\alpha+1)=\prod_p\left(1+\frac{p}{p+1}\left(\frac{p^\alpha+1}{p^{2\alpha+1}}+\frac{(p^{3\alpha}-1)p^{2\alpha+1}+p^{4\alpha}-1}{(p^{3(2\alpha+1)}-p^{2\alpha+1})(p^\alpha-1)}\right)\right),$$

当$k\geq 3$时有

$$\begin{aligned}R(k\alpha+1) &= \prod_p\left(1+\frac{p^{k\alpha+1}-p}{(p+1)(p^\alpha-1)p^{k\alpha+1}}+\sum_{j=2}^{k}\frac{p^{(k-j+3)\alpha+1}-p}{(p+1)(p^\alpha-1)p^{(k\alpha+1)j}}\right.\\ &\left.+\sum_{j=1}^{k}\frac{p^{(k-j+3)\alpha+1}-p}{(p+1)(p^\alpha-1)(p^{(k+j)(k\alpha+1)}-p^{(k\alpha+1)j})}\right)\end{aligned}$$

定理2.1.4 设$d(n)$表示*Dirichlet*除数函数, 对任意实数$x\geq 1$有

$$\sum_{n\leq x}d(a_3(n)b_k(n))=\frac{6x}{\pi^2}R(1)\cdot f(\log x)+O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中$f(y)$为y的k次多项式, 若$k=2$时有

$$R(1)=\prod_p\left(1+\frac{p^3}{(p+1)^3}\left(\frac{3p+4}{p^3+p}-\frac{3}{p^2}-\frac{1}{p^3}\right)\right),$$

若$k\geq 3$时有

$$\begin{aligned}R(1) &= \prod_p\left(1+\sum_{j=2}^{k}\frac{\left(k-j+3-\binom{k+1}{j}\right)p^{k-j+1}}{(p+1)^{k+1}}+\right.\\ &\quad\left.+\sum_{j=1}^{k}\frac{k-j+3}{(p+1)^{k+1}(p^{j-1}-p^{j-k-1})}-\frac{1}{(p+1)^{k+1}}\right)\end{aligned}$$

定理2.1.2–2.1.4 的证明: 设

$$f_1(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(a_3(n)b_k(n))}{n^s},$$

$$f_2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha(a_3(n)b_k(n))}{n^s},$$

$$f_3(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(a_3(n)b_k(n))}{n^s}.$$

根据欧拉积公式及$\varphi(n)$, $\sigma_\alpha(n)$和$d(n)$的定义, 当$k=2$时我们可得

$$\begin{aligned}f_1(s) &= \prod_p\left(1+\frac{\varphi(a_3(p)b_k(p))}{p^s}+\frac{\varphi(a_3(p^2)b_k(p^2))}{p^{2s}}+\cdots\right)\\ &= \prod_p\left(1+\frac{p^2-p}{p^s}+(\frac{p^2-p}{p^{2s}}+\frac{p^3-p^2}{p^{3s}})(\frac{1}{1-p^{-2s}})\right)\\ &= \prod_p\left(1+\frac{1}{p^{s-2}}-\frac{1}{p^{s-1}}+\frac{(p^2-p)(p^s+p)}{p^{3s}-p^s}\right)\\ &= \frac{\zeta(s-2)}{\zeta(2(s-2))}\prod_p\left(1+\frac{p^{s-2}}{p^{s-2}+1}\left(\frac{(p^2-p)(p^s+p)}{p^{3s}-p^s}-\frac{1}{p^{s-1}}\right)\right),\end{aligned}$$

$$f_2(s)=\frac{\zeta(s-2\alpha)}{\zeta(2(s-2\alpha))}\prod_p\left(1+\frac{p^{s-2\alpha}}{p^{s-2\alpha}+1}\left(\frac{p^\alpha+1}{p^s}+\frac{(p^{3\alpha}-1)p^s+p^{4\alpha}-1}{(p^{3s}-p^s)(p^\alpha-1)}\right)\right),$$

$$f_3(s)=\frac{\zeta^3(s)}{\zeta^3(2s)}\prod_p\left(1+\frac{p^{3s}}{(p^s+1)^3}\left(\frac{3p^s+4}{p^{3s}+p^s}-\frac{3}{p^{2s}}-\frac{1}{p^{3s}}\right)\right).$$

当$k\geq 3$时有

$$\begin{aligned} f_1(s) &= \prod_p\left(1+\frac{1}{p^{s-k}}-\frac{1}{p^{s-k+1}}+\sum_{j=2}^{k}\frac{p^{k-j+2}-p^{k-j+1}}{p^{js}}\right.\\ &\qquad\left.+\sum_{j=1}^{k}\frac{p^{k-j+2}-p^{k-j+1}}{p^{(k+j)s}-p^{js}}\right)\\ &= \frac{\zeta(s-k)}{\zeta(2(s-k))}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{s-k+1}+p}+\sum_{j=2}^{k}\frac{p^{s-j+2}-p^{s-j+1}}{(p^{s-k}+1)p^{js}}+\right.\\ &\qquad\left.+\sum_{j=1}^{k}\frac{p^{s-j+2}-p^{s-j+1}}{(p^{s-k}+1)(p^{(k+j)s}-p^{js})}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(s) &= \frac{\zeta(s-k\alpha)}{\zeta(2(s-k\alpha))}\prod_p\left(1+\frac{p^s-p^{s-k\alpha}}{(p^{s-k\alpha}+1)(p^\alpha-1)p^s}\right.\\ &\qquad+\sum_{j=2}^{k}\frac{p^{(3-j)\alpha+s}-p^{s-k\alpha}}{(p^{s-k\alpha}+1)(p^\alpha-1)p^{js}}\\ &\qquad\left.+\sum_{j=1}^{k}\frac{p^{(3-j)\alpha+s}-p^{s-k\alpha}}{(p^{s-k\alpha}+1)(p^\alpha-1)(p^{(k+j)s}-p^{js})}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(s) &= \frac{\zeta^{k+1}(s)}{\zeta^{k+1}(2s)}\prod_p\left(1+\sum_{j=2}^{k}\frac{\left(k-j+3-\binom{k+1}{j}\right)p^{(k-j+1)s}}{(p^s+1)^{k+1}}\right.\\ &\qquad\left.+\sum_{j=1}^{k}\frac{k-j+3}{(p^s+1)^{k+1}(p^{(j-1)s}-p^{(j-k-1)s})}-\frac{1}{(p^s+1)^{k+1}}\right). \end{aligned}$$

则由Perron公式和定理2.1.1的证明方法, 我们就可以得到其余结论. 一般来说, 我们可以利用同样的方法研究序列$a_m(n)b_k(n)$的渐近性质, (其中$m,k\geq 2$为给定的正整数), 并可得出一些较为精确的渐近公式.

2.1.3 k次可加补数

引理2.1.1 对任意实数$x\geq 3$及满足$f(0)=0$的任意非零算术函数$f(0)$, 我们有

$$\sum_{n\leq x}f(a_k(n))=\sum_{t=1}^{\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1}\sum_{n\leq g(t)}f(n)+O\left(\sum_{n\leq g\left(\left[x^{\frac{1}{k}}\right]\right)}f(n)\right),$$

其中$[x]$ 表示小于或等于x 的最大整数, $g(t)=\sum_{i=1}^{k-1}\begin{pmatrix} i\\ k\end{pmatrix}t^i$.

证明: 任意实数$x \geq 1$, 设M为固定的正整数且满足

$$M^k \leq x < (M+1)^k.$$

注意到, 若n取遍区间$\left[t^k, (t+1)^k\right)$上所有的整数, 那么$a_k(n)$也取遍区间$\left[0, (t+1)^k - t^k - 1\right]$上所有的整数. 又因为$f(0) = 0$, 所以我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} f(a_k(n)) &= \sum_{t=1}^{M-1} \sum_{t^k \leq n < (t+1)^k} f(a_k(n)) + \sum_{M^k \leq n \leq x} f(a_k(n)) \\ &= \sum_{t=1}^{M-1} \sum_{n \leq g(t)} f(n) + \sum_{g(M)+M^k-x \leq n < g(M)} f(n),\end{aligned}$$

其中$g(t) = \sum_{i=1}^{k-1} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} t^i$. 由于$M = \left[x^{\frac{1}{k}}\right]$, 故可得

$$\sum_{n \leq x} f(a_k(n)) = \sum_{t=1}^{\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1} \sum_{n \leq g(t)} f(n) + O\left(\sum_{n \leq g\left(\left[x^{\frac{1}{k}}\right]\right)} f(n)\right).$$

引理2.1.1 得证.

注: 这个引理是十分有意义的. 因为如果我们已知$f(n)$的均值公式, 那么根据引理*2.1.1*很容易就可以得出$\sum\limits_{n \leq x} f(a_k(n))$的均值公式.

定理2.1.5 对任意实数$x \geq 3$, 则有渐近公式

$$\sum_{n \leq x} a_k(n) = \frac{k^2}{4k-2} x^{2-\frac{1}{k}} + O\left(x^{2-\frac{2}{k}}\right).$$

证明: 设$f(n) = n$, 根据欧拉求和公式我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} a_k(n) &= \sum_{t=1}^{\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1} \sum_{n \leq g(t)} n + O\left(\sum_{n \leq g\left(\left[x^{\frac{1}{k}}\right]\right)} n\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1} k^2 t^{2k-2} + O\left(x^{2-\frac{2}{k}}\right) \\ &= \frac{k^2}{4k-2} x^{2-\frac{1}{k}} + O\left(x^{2-\frac{2}{k}}\right).\end{aligned}$$

于是完成了定理2.1.5 的证明.

定理2.1.6 对任意实数$x\geq 3$, 我们有

$$\sum_{n\leq x} d(a_k(n)) = \left(1-\frac{1}{k}\right)x\ln x + \left(2\gamma + \ln k - 2 + \frac{1}{k}\right)x + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\ln x\right),$$

其中γ是欧拉常数.

证明: 注意到

$$\sum_{n\leq x} d(n) = x\ln x + (2\gamma-1)x + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right),$$

并由引理2.1.1则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leq x} d(a_k(n)) \\
= &\sum_{t=1}^{\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1}\sum_{n\leq g(t)} d(n) + O\left(\sum_{n\leq g\left(\left[x^{\frac{1}{k}}\right]\right)} d(n)\right) \\
= &\sum_{t=1}^{\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1}\left(kt^{k-1}\left(\ln kt^{k-1} + \ln\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right)\right. \\
&\left. +(2\gamma-1)kt^{k-1}\right) + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\ln x\right) \\
= &\sum_{t=1}^{\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1}\left(k(k-1)t^{k-1}\ln t + (2\gamma+\ln k-1)kt^{k-1}\right. \\
&\left. +O(t^{k-2})\right) + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\ln x\right) \\
= &\ k(k-1)\sum_{t=1}^{\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1} t^{k-1}\ln t + (2\gamma+\ln k-1)k\sum_{t=1}^{\left[x^{\frac{1}{k}}\right]-1} t^{k-1} \\
&+O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\ln x\right).
\end{aligned}$$

根据欧拉求和公式容易得到

$$\sum_{n\leq x} d(a_k(n)) = \left(1-\frac{1}{k}\right)x\ln x + \left(2\gamma + \ln k - 2 + \frac{1}{k}\right)x + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\ln x\right).$$

于是完成了定理2.1.6的证明.

2.2 k次幂因子数序列

2.2.1 引言

定义2.2.1 设$k\geq 2$是任意给定的整数, 如果对任意素数p有$p^k\dagger n$, 则称自然数n是无k次幂因子数.

无k次幂因子数序列可以由如下方式得出: 从自然数集合中(0, 1除外), 去掉所有2^k的倍数, 之后再去掉所有3^k的倍数, 再去掉所有5^k的倍数, $\cdots$, 去掉所有素数的k次幂的倍数. 那么无k次幂因子序列即为: $2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, \cdots$.

定义2.2.2 设$k \geq 2$是任意给定的整数, 如果对任意素数p有$p \mid n$且$p^k \mid n$, 则称n是完全k次幂因子数.

定义2.2.3 设n 的标准分解式为$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, 则定义$\omega(n) = r$, 称$\omega(n)$为$n$ 的所有素因子数函数.

定义2.2.4 伪$Smarandache$ 无平方因子函数$ZW(n)$被定义为满足$n \mid m^n$ 的最小正整数m.

显然$ZW(1) = 1$. 当$n > 1$, 乐茂华在[13]中给出

$$ZW(n) = p_1 p_2 \cdots p_k, \tag{2-1}$$

其中$p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是n 不同的素因子. 同时他也证明了级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(ZW(n))^a}, \quad a \in R, \quad a > 0$$

是发散的.

本小节中，我们将对完全k次幂因子数序列，无k次幂因子数序列，以及伪Smarandache无平方因子函数$ZW(n)$的各种类型的均值问题进行讨论.

2.2.2 完全k次幂因子数序列

为叙述方便, 设A表示所有完全k次幂因子数的集合，并且我们引入一个新的数论函数$a(n)$:

$$a(n) = \begin{cases} 1, & \text{如果} \quad n = 1; \\ n, & \text{如果} \quad n\text{是完全}k\text{次幂数} \\ 0, & \text{如果} \quad n\text{不是完全}k\text{次幂数} \end{cases}$$

显然

$$\sum_{\substack{n \in A \\ n \leq x}} n = \sum_{n \leq x} a(n).$$

定理2.2.1 对任意实数$x \geq 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{\substack{n \in A \\ n \leq x}} n = \frac{6k \cdot x^{1+\frac{1}{k}}}{(k+1)\pi^2} \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{k}} - 1)}\right) + O\left(x^{1+\frac{1}{2k}+\varepsilon}\right),$$

其中ε 是任意给定的正数.

证明: 令

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}.$$

由Euler乘积公式及$a(n)$的定义可知

$$\begin{aligned}
f(s) &= \prod_p \left(1+\frac{a(p^k)}{p^{ks}}+\frac{a(p^{k+1})}{p^{(k+1)s}}+\cdots\right) \\
&= \prod_p \left(1+\frac{1}{p^{k(s-1)}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^{s-1}}}\right) \\
&= \prod_p \left(1+\frac{1}{p^{k(s-1)}}\right)\prod_p \left(1+\frac{1}{(p^{k(s-1)}+1)(p^{s-1}-1)}\right) \\
&= \frac{\zeta(k(s-1))}{\zeta(2k(s-1))}\prod_p \left(1+\frac{1}{(p^{k(s-1)}+1)(p^{s-1}-1)}\right),
\end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$是Riemann zeta-函数. 注意到不等式

$$|a(n)| \le n, \qquad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^{\sigma}}\right| < \frac{1}{\sigma-1-\frac{1}{k}},$$

其中$\sigma > 1-\frac{1}{k}$是复数s的实部. 于是, 利用Perron公式可以推出

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x}\frac{a(n)}{n^{s_0}} &= \frac{1}{2i\pi}\int_{b-iT}^{b+iT} f(s+s_0)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x^b B(b+\sigma_0)}{T}\right) \\
&\quad + O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min(1,\frac{\log x}{T})\right) + O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min(1,\frac{x}{||x||})\right),
\end{aligned}$$

其中N是最接近于x的整数, $\|x\| = |x-N|$. 取$s_0 = 0$, $b = 2+\frac{1}{k}$, $T = x^{1+\frac{1}{2k}}$, $H(x)=x$, $B(\sigma) = \frac{1}{\sigma-1-\frac{1}{k}}$, 则有

$$\sum_{n\le x} a(n) = \frac{1}{2i\pi}\int_{2+\frac{1}{k}-iT}^{2+\frac{1}{k}+iT} \frac{\zeta(k(s-1))}{\zeta(2k(s-1))}R(s)\frac{x^s}{s}ds + O(x^{1+\frac{1}{2k}+\varepsilon}),$$

其中

$$R(s) = \prod_p \left(1+\frac{1}{(p^{k(s-1)}+1)(p^{s-1}-1)}\right).$$

为了估计主项

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{2+\frac{1}{k}-iT}^{2+\frac{1}{k}+iT} \frac{\zeta(k(s-1))x^s}{\zeta(2k(s-1))s}R(s)ds,$$

我们将积分线由$s = 2+\frac{1}{k}\pm iT$移至$s = 1+\frac{1}{2k}\pm iT$. 这时, 函数

$$f(s) = \frac{\zeta(k(s-1))x^s}{\zeta(2k(s-1))s}R(s)$$

在$s=1+\frac{1}{k}$处有一个一阶极点且留数是$\frac{kx^{1+\frac{1}{k}}}{(k+1)\zeta(2)}R(1+\frac{1}{k})$. 于是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2i\pi}\left(\int_{2+\frac{1}{k}-iT}^{2+\frac{1}{k}+iT}+\int_{2+\frac{1}{k}+iT}^{1+\frac{1}{2k}+iT}+\int_{1+\frac{1}{2k}+iT}^{1+\frac{1}{2k}-iT}+\int_{1+\frac{1}{2k}-iT}^{2+\frac{1}{k}-iT}\right)\frac{\zeta(k(s-1))x^s}{\zeta(2k(s-1))s}R(s)ds\\=&\frac{k\cdot x^{1+\frac{1}{k}}}{(k+1)\zeta(2)}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right).\end{aligned}$$

我们容易得到估计

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{2+\frac{1}{k}+iT}^{1+\frac{1}{2k}+iT}+\int_{1+\frac{1}{2k}-iT}^{2+\frac{1}{2}-iT}\right)\frac{\zeta(k(s-1))x^s}{\zeta(2k(s-1))s}R(s)ds\right|\\\ll&\int_{1+\frac{1}{2k}}^{2+\frac{1}{k}}\left|\frac{\zeta(k(\sigma-1+iT))}{\zeta(2k(\sigma-1+iT))}R(s)\frac{x^{2+\frac{1}{k}}}{T}\right|d\sigma\ll\frac{x^{2+\frac{1}{k}}}{T}=x^{1+\frac{1}{2k}}\end{aligned}$$

及

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\frac{1}{2k}+iT}^{1+\frac{1}{2k}-iT}\frac{\zeta(k(s-1))x^s}{\zeta(2k(s-2))s}R(s)ds\right|\ll\int_0^T\left|\frac{\zeta(1/2+ikt)}{\zeta(1+2ikt)}\frac{x^{1+\frac{1}{2k}}}{t}\right|dt\ll x^{1+\frac{1}{2k}+\varepsilon}.$$

注意到$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, 根据上面的推导可得

$$\sum_{\substack{n\in A\\n\le x}}n=\frac{6k\cdot x^{1+\frac{1}{k}}}{(k+1)\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)+O\left(x^{1+\frac{1}{2k}+\varepsilon}\right).$$

这样就完成了定理2.2.1的证明.

定理2.2.2 设$\varphi(n)$是$Euler$函数. 则对任意实数$x\ge1$, 我们有

$$\sum_{\substack{n\in A\\n\le x}}\varphi(n)=\frac{6k\cdot x^{1+\frac{1}{k}}}{(k+1)\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{p-p^{\frac{1}{k}}}{p^{2+\frac{1}{k}}-p^2+p^{1+\frac{1}{k}}-p}\right)+O\left(x^{1+\frac{1}{2k}+\varepsilon}\right).$$

定理2.2.3 设$\alpha>0$, $\sigma_\alpha(n)=\sum\limits_{d|n}d^\alpha$. 则对任意实数$x\ge1$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\in A\\n\le x}}\sigma_\alpha(n)=&\frac{6k\cdot x^{\alpha+\frac{1}{k}}}{(k\alpha+1)\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{p^{\alpha+\frac{1}{k}}(p^{\frac{1}{k}}-1)\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{p^i}\right)^\alpha+p^{\alpha+\frac{1}{k}}+p^{\frac{1}{k}}-1}{\left(p^{\alpha+\frac{1}{k}}-1\right)(p+1)(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)\\&+O\left(x^{\alpha+\frac{1}{2k}+\varepsilon}\right).\end{aligned}$$

定理2.2.4 设$d(n)$表示*Dirichlet*除数函数. 则对任意实数$x\geq 1$, 我们有

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leq x}} d(n) = \frac{6k\cdot x^{\frac{1}{k}}}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{(2p^{\frac{1}{k}}-1)\sum\limits_{i=2}^{k+1}\binom{k+1}{i}p^{k+1-i}-kp^{k+\frac{1}{k}}}{(p+1)^{k+1}(p^{\frac{1}{k}}-1)^2}\right)\cdot f(\log x)$$
$$+O\left(x^{\frac{1}{2k}+\varepsilon}\right).$$

其中$f(y)$是关于y的k次多项式.

定理2.2.5 对任意实数$x\geq 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leq x}}\sigma_\alpha((m,n)) = \frac{6k\cdot x^{\frac{1}{k}}}{\pi^2}\prod_{p\dagger m}\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)\prod_{\substack{p^\beta\|m\\ \beta\leq k}}\left(1+\frac{p^{\frac{1}{k}}\sum\limits_{i=0}^{\beta}p^{i\alpha}}{p(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)$$
$$\times\prod_{\substack{p^\beta\|m\\ \beta>k}}\left(1+\sum_{i=k}^{\beta-1}p^{-\frac{i}{k}}\sum_{j=0}^{i}p^{j\alpha}+\frac{p^{\frac{1}{k}}\sum_{i=0}^{\beta}p^{i\alpha}}{p(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)\prod_{p|m}\left(\frac{p}{p+1}\right)+O\left(x^{\frac{1}{2k}+\varepsilon}\right).$$

其中m是任意给定的整数, (m,n)表示m与n的最大共因子.

定理2.2.6 对任意实数$x\geq 1$, 我们有

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leq x}}\varphi((m,n)) = \frac{6k\cdot x^{\frac{1}{k}}}{\pi^2}\prod_{p\dagger m}\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)\prod_{\substack{p^\beta\|m\\ \beta\leq k}}\left(1+\frac{\left(p^\beta-p^{\beta-1}\right)p^{\frac{1}{k}}}{p(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)$$
$$\times\prod_{\substack{p^\beta\|m\\ \beta>k}}\left(1+\sum_{i=k}^{\beta-1}p^{-\frac{i}{k}}\left(p^i-p^{i-1}\right)+\frac{\left(p^\beta-p^{\beta-1}\right)p^{\frac{1}{k}}}{p(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)\prod_{p|m}\left(\frac{p}{p+1}\right)+O\left(x^{\frac{1}{2k}+\varepsilon}\right).$$

定理2.2.2–2.2.6 的证明: 类似的, 令

$$f_1(s)=\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s},\qquad f_2(s)=\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s},\qquad f_3(s)=\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{d(n)}{n^s},$$

$$f_4(s)=\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha((m,n))}{n^s},\qquad f_5(s)=\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{\varphi((m,n))}{n^s}.$$

利用Euler乘积公式以及$\varphi(n)$, $\sigma_\alpha(n)$和$d(n)$ 的各自定义, 也可以得到

$$f_1(s) = \prod_p\left(1+\frac{\varphi(p^k)}{p^{ks}}+\frac{\varphi(p^{k+1})}{p^{(k+1)s}}+\cdots\right)=\prod_p\left(1+\frac{\varphi(p^k)}{p^{ks}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{s-1}}}\right)\right)$$

$$= \frac{\zeta(k(s-1))}{\zeta(2k(s-1))}\prod_p\left(1+\frac{p-p^{s-1}}{(p^{k(s-1)}+1)(p^s-p)}\right);$$

$$f_2(s)=\frac{\zeta(k(s-\alpha))}{\zeta(2k(s-\alpha))}\prod_p\left(1+\frac{(p^{s-\alpha}-1)p^s\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{p^i}\right)^{\alpha}+p^s+p^{s-\alpha}-1}{(p^{k(s-\alpha)}+1)(p^{s-\alpha}-1)(p^s-1)}\right);$$

$$f_3(s)=\frac{\zeta^{k+1}(ks)}{\zeta^{k+1}(2ks)}\prod_p\left(1+\frac{(2p^s-1)\sum_{i=2}^{k+1}\binom{k+1}{i}p^{k(k+1-i)s}-kp^{(k^2+1)s}}{(p^{ks}+1)^{k+1}(p^s-1)^2}\right);$$

$$\begin{aligned}f_4(s) &= \prod_p\left(1+\frac{\sigma_\alpha((m,p^k))}{p^{ks}}+\frac{\sigma_\alpha((m,p^{k+1}))}{p^{(k+1)s}}+\cdots\right)\\ &= \frac{\zeta(ks)}{\zeta(2ks)}\prod_{p|m}\left(\frac{p^{ks}}{p^{ks}+1}\right)\prod_{p\dagger m}\left(1+\frac{1}{(p^{ks}+1)(p^s-1)}\right)\\ &\quad\times\prod_{\substack{p^\beta\|m\\ \beta\le k}}\left(1+\frac{\sigma_\alpha(p^\beta)}{p^{ks}(1-\frac{1}{p^s})}\right)\prod_{\substack{p^\beta\|m\\ \beta>k}}\left(1+\sum_{i=k}^{\beta-1}\frac{\sigma_\alpha(p^i)}{p^{is}}+\frac{\sigma_\alpha(p^\beta)}{p^{ks}(1-\frac{1}{p^s})}\right)\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}f_5(s) &= \frac{\zeta(ks)}{\zeta(2ks)}\prod_{p|m}\left(\frac{p^{ks}}{p^{ks}+1}\right)\prod_{p\dagger m}\left(1+\frac{1}{(p^{ks}+1)(p^s-1)}\right)\\ &\quad\times\prod_{\substack{p^\beta\|m\\ \beta\le k}}\left(1+\frac{p^\beta-p^{\beta-1}}{p^{ks}(1-\frac{1}{p^s})}\right)\prod_{\substack{p^\beta\|m\\ \beta>k}}\left(1+\sum_{i=k}^{\beta-1}\frac{p^i-p^{i-1}}{p^{is}}+\frac{p^\beta-p^{\beta-1}}{p^{ks}(1-\frac{1}{p^s})}\right).\end{aligned}$$

通过应用Perron公式以及证明定理2.2.1的方法, 可以推出定理2.2.2—2.2.6 的结果.

2.2.3 k次幂因子数序列

引理2.2.1 对任意实数$x\ge 2$, 我们有

$$\sum_{n\le x}\omega(n)=x\ln\ln x+Ax+O\left(\frac{x}{\ln x}\right),$$

$$\sum_{n\le x}\omega^2(n)=x(\ln\ln x)^2+O\left(x\ln\ln x\right),$$

其中$A=\gamma+\sum\limits_p\left(\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right)$.

证明: (参阅文献[6]).

引理2.2.2 设$\mu(n)$为$Möbius$ 函数, 对任意实数$s>1$有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\omega(n)}{n^s}=-\frac{1}{\zeta(s)}\sum_{p}\frac{1}{p^s-1}.$$

证明: 由$\omega(n)$的定义可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\omega(n)}{n^s}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mu(n)\sum_{p|n}1}{n^s}\\
=&\sum_{p}\sum_{\substack{n=1\\(n,p)=1}}^{\infty}\frac{\mu(np)}{n^sp^s}=-\sum_{p}\frac{1}{p^s}\sum_{\substack{n=1\\(n,p)=1}}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\\
=&-\sum_{p}\frac{1}{p^s}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\right)\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=-\frac{1}{\zeta(s)}\sum_{p}\frac{1}{p^s-1}.
\end{aligned}$$

引理2.2.2得证.

引理2.2.3 设$k\geq 2$为整数, 对任意实数$x\geq 2$, 我们有渐近公式

$$\sum_{d^km\leq x}\omega^2(m)\mu(d)=\frac{x(\ln\ln x)^2}{\zeta(k)}+O\left(x\ln\ln x\right).$$

证明: 应用引理2.2.1可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{d^km\leq x}\omega^2(m)\mu(d)=\sum_{d\leq x^{\frac{1}{k}}}\mu(d)\sum_{m\leq x/d^k}\omega^2(m)\\
&=\sum_{d\leq x^{\frac{1}{k}}}\mu(d)\left(\frac{x}{d^k}(\ln\ln\frac{x}{d^k})^2+O\left(\frac{x}{d^k}\ln\ln\frac{x}{d^k}\right)\right)\\
&=x\sum_{d\leq x^{\frac{1}{k}}}\frac{\mu(d)}{d^k}\left(\ln\ln x+\ln\ln\left(1-\frac{k\ln d}{\ln x}\right)\right)^2+O\left(x\ln\ln x\right)\\
&=x\left(\ln\ln x\right)^2\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^k}+O\left(x\ln\ln x\sum_{d\leq x^{\frac{1}{k}}}\frac{\ln d}{d^k\ln x}\right)+O(x\ln\ln x)\\
&=\frac{x(\ln\ln x)^2}{\zeta(k)}+O\left(x\ln\ln x\right).
\end{aligned}$$

引理2.2.3得证.

引理2.2.4 设$k\geq 2$为整数, 对任意实数$x\geq 2$, 则有

$$\sum_{d^km\leq x}\omega^2(d)\mu(d)=O(x).$$

证明: 应用引理2.2.1 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{d^k m\le x}\omega^2(d)\mu(d)\\
=&\sum_{d\le x^{\frac{1}{k}}}\omega^2(d)\mu(d)\sum_{\substack{m\le x/d^k\\ u|m}}1\\
=&\sum_{d\le x^{\frac{1}{k}}}\omega^2(d)\mu(d)\left[\frac{x}{ud^k}\right]\\
=&\ x\sum_{d\le x^{\frac{1}{k}}}\frac{\omega^2(d)\mu(d)}{d^k}+O\left(\sum_{d\le x^{\frac{1}{k}}}\omega^2(d)\mu(d)\right)=O(x).
\end{aligned}$$

引理2.2.4得证.

引理2.2.5 设$k\ge 2$为整数, 对任意实数$x\ge 2$, 我们有

$$\sum_{d^k m\le x}\omega^2((d,m))\mu(d)=O(x).$$

证明: 设(u,v)表示u和v的最大公约数, 由引理2.2.1可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{d^k m\le x}\omega^2((d,m))\mu(d)\\
=&\sum_{d\le x^{\frac{1}{k}}}\mu(d)\sum_{u|d}\sum_{m\le x/d^k}\omega^2(u)\\
=&\sum_{d\le x^{\frac{1}{k}}}\mu(d)\sum_{u|d}\omega^2(u)\left[\frac{x}{d^k}\right]\\
=&\ x\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)\sum\limits_{u|d}\frac{\omega^2(u)}{u}}{d^k}+O\left(\sum_{d\le x^{\frac{1}{k}}}\mu(d)\sum_{u|d}\omega^2(u)\right)=O(x).
\end{aligned}$$

引理2.2.5得证.

引理2.2.6 设$k\ge 2$为整数, 对任意实数$x\ge 2$, 我们有渐近公式

$$\sum_{d^k m\le x}\omega(d)\omega(m)\mu(d)=Cx\ln\ln x+O(x),$$

其中$C=-\frac{1}{\zeta(k)}\sum\limits_{p}\frac{1}{p^k-1}$.

证明: 由引理2.2.1及引理2.2.2可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{d^k m\le x}\omega(d)\omega(m)\mu(d)\\
=&\sum_{d\le x^{\frac{1}{k}}}\omega(d)\mu(d)\sum_{m\le x/d^k}\omega(m)\\
=&\sum_{d\le x^{\frac{1}{k}}}\omega(d)\mu(d)\left(\frac{x\ln\ln\frac{x}{d^k}}{d^k}+\frac{Ax}{d^k}+O\left(\frac{x}{d^k\ln\frac{x}{d^k}}\right)\right)\\
=&\ x\sum_{d\le x^{\frac{1}{k}}}\frac{\omega(d)\mu(d)}{d^k}\left(\ln\ln x+\ln\ln\left(1-\frac{k\ln d}{\ln x}\right)\right)\\
&\quad+Ax\sum_{d\le x^{\frac{1}{k}}}\frac{\omega(d)\mu(d)}{d^k}+O\left(\frac{x}{\ln x}\right)\\
=&\ (x\ln\ln x+Ax)\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\omega(d)\mu(d)}{d^k}+O\left(x\sum_{d\le x^{\frac{1}{k}}}\frac{\ln d}{d^k\ln x}\right)+O\left(\frac{x}{\ln x}\right)\\
=&\ Cx\ln\ln x+O(x),
\end{aligned}$$

其中$C=-\frac{1}{\zeta(k)}\sum\limits_{p}\frac{1}{p^k-1}$.

引理2.2.6得证.

定理2.2.7 设$\mathcal{A}$表示所有无k次幂因子数的集合, 则对任意实数$x\ge 2$, 我们有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in\mathcal{A}}}\omega^2(n)=\frac{x(\ln\ln x)^2}{\zeta(k)}+O\left(x\ln\ln x\right).$$

其中$\zeta(k)$ 为*Riemamn zeta*-函数.

证明: 对任意正整数n, 由文献[4]可得

$$\sum_{d^k|n}\mu(d)=\begin{cases}1, & n \text{ 为无}k\text{ 次因子数},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

由引理2.2.3—2.2.6, 则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n\le x\\ n\in\mathcal{A}}}\omega^2(n)=\sum_{n\le x}\omega^2(n)\sum_{d^k|n}\mu(d)=\sum_{d^k m\le x}\omega^2(d^k m)\mu(d)\\
&=\sum_{d^k m\le x}\left(\omega(d)+\omega(m)-\omega((d,m))\right)^2\mu(d)\\
&=\sum_{d^k m\le x}\omega^2(m)\mu(d)+\sum_{d^k m\le x}\omega^2(d)\mu(d)+\sum_{d^k m\le x}\omega^2((d,m))\mu(d)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2\left(\sum_{d^k m\le x}\omega(d)\omega(m)\mu(d)\right)+O\left(\sum_{d^k m\le x}\omega(d)\omega(m)\right)\\
&=\left(\frac{x(\ln\ln x)^2}{\zeta(k)}+O\left(x\ln\ln x\right)\right)+2\left(Cx\ln\ln x+O(x)\right)+O(x\ln\ln x)\\
&=\frac{x(\ln\ln x)^2}{\zeta(k)}+O\left(x\ln\ln x\right).
\end{aligned}
$$

于是完成了定理2.2.7的证明.

2.2.4 伪Smarandache无平方因子函数

定理2.2.8 对任意实数α, s且满足$s-\alpha>1$及$\alpha>0$，则有

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ZW^{\alpha}(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s)\zeta(s-\alpha)}{\zeta(2s-2\alpha)}\prod_p\left[1-\frac{1}{p^s+p^{\alpha}}\right],
$$

其中$\zeta(s)$ 是*Riemann zeta*-函数, $\prod\limits_p$表示对所有的素数因子求积.

证明: 对任意实数α, s满足$s-\alpha>1$及$\alpha>0$, 设

$$
f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ZW^{\alpha}(n)}{n^s}.
$$

根据(2-1)与Euler乘积公式, 可以得到

$$
\begin{aligned}
f(s) &= \prod_p\left[1+\frac{p^{\alpha}}{p^s}+\frac{p^{\alpha}}{p^{2s}}+\cdots\right]=\prod_p\left[1+\frac{\frac{1}{p^{s-\alpha}}}{1-\frac{1}{p^s}}\right]\\
&= \prod_p\left[\left(\frac{1+\frac{1}{p^{s-\alpha}}}{1-\frac{1}{p^s}}\right)\left(1-\frac{1}{p^s+p^{\alpha}}\right)\right]\\
&= \frac{\zeta(s)\zeta(s-\alpha)}{\zeta(2s-2\alpha)}\prod_p\left[1-\frac{1}{p^s+p^{\alpha}}\right].
\end{aligned}
$$

于是完成了定理2.2.8的证明.

定理2.2.9 对任意实数$\alpha>0$及$x\ge 1$, 则有

$$
\sum_{n\le x}ZW^{\alpha}(n)=\frac{\zeta(\alpha+1)x^{\alpha+1}}{\zeta(2)(\alpha+1)}\prod_p\left[1-\frac{1}{p^{\alpha}(p+1)}\right]+O\left(x^{\alpha+\frac{1}{2}+\epsilon}\right).
$$

证明: 对任意实数$\alpha>0$及$x\ge 1$, 显然有

$$
|ZW^{\alpha}(n)|\le n^{\alpha}\quad 和\quad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ZW^{\alpha}(n)}{n^{\sigma}}\right|<\frac{1}{\sigma-\alpha},
$$

其中σ是s的实部. 由Perron公式可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\frac{ZW^{\alpha}(n)}{n^{s_0}} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} f(s+s_0)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + O\left(\frac{x^b B(b+\sigma_0)}{T}\right)\\ &\quad + O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min\left(1,\frac{\log x}{T}\right)\right)\\ &\quad + O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min\left(1,\frac{x}{||x||}\right)\right),\end{aligned}$$

其中N是距离x最近的整数, 且$||x|| = |x-N|$. 在上式中取$s_0=0$, $b=\alpha+\frac{3}{2}$及$T>2$, 因此

$$\sum_{n\le x} ZW^{\alpha}(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha+\frac{3}{2}-iT}^{\alpha+\frac{3}{2}+iT} f(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + O\left(\frac{x^{\alpha+\frac{3}{2}}}{T}\right).$$

现在我们将积分线从$\alpha+\frac{3}{2}\pm iT$移到$\alpha+\frac{1}{2}-iT$, 这时函数$f(s)\frac{x^s}{s}$在$s=\alpha+1$有一个一阶极点, 且其留数为

$$\frac{\zeta(\alpha+1)x^{\alpha+1}}{\zeta(2)(\alpha+1)}\prod_p\left[1-\frac{1}{p^{\alpha}(p+1)}\right].$$

取$T=x$, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} ZW^{\alpha}(n) &= \frac{\zeta(\alpha+1)x^{\alpha+1}}{\zeta(2)(\alpha+1)}\prod_p\left[1-\frac{1}{p^{\alpha}(p+1)}\right]\\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha+\frac{1}{2}-ix}^{\alpha+\frac{1}{2}+ix} f(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + O\left(x^{\alpha+\frac{1}{2}+\epsilon}\right)\\ &= \frac{\zeta(\alpha+1)x^{\alpha+1}}{\zeta(2)(\alpha+1)}\prod_p\left[1-\frac{1}{p^{\alpha}(p+1)}\right]\\ &\quad + O\left(\int_{-x}^{x}\left|f\left(\alpha+\frac{1}{2}+\epsilon+ix\right)\right|\frac{x^{\alpha+\frac{1}{2}+\epsilon}}{(1+|t|)}\mathrm{d}t\right) + O\left(x^{\alpha+\frac{1}{2}+\epsilon}\right)\\ &= \frac{\zeta(\alpha+1)x^{\alpha+1}}{\zeta(2)(\alpha+1)}\prod_p\left[1-\frac{1}{p^{\alpha}(p+1)}\right] + O\left(x^{\alpha+\frac{1}{2}+\epsilon}\right).\end{aligned}$$

于是完成了定理2.2.9的证明.

注意到: $\sum\limits_{n\le x} ZW^{0}(n) = x + O(1)$和$\lim\limits_{\alpha\longrightarrow 0^+}\alpha\zeta(\alpha+1)=1$, 由定理*2.2.9*我们可得极限

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{1}{\alpha}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{\alpha}(p+1)}\right)=\zeta(2).$$

2.3 素因子最大指数序列$\{e_p(n)\}$(II)

2.3.1 $e_p(n)$与Euler函数

引理2.3.1 设p为一给定的素数, 对任意实数$x \geq 1$, 我们有

$$\sum_{\substack{n\leq x\\(n,p)=1}} \phi(n) = \frac{3p}{(p+1)\pi^2}x^2 + O\left(x^{\frac{3}{2}+\epsilon}\right).$$

证明: 设

$$f(s) = \sum_{\substack{n=1\\(u,p)=1}}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^s},$$

且$Re(s) > 1$. 则根据欧拉积公式及$\phi(n)$的可乘性我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n=1\\(n,p)=1}}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^s} &= \prod_{q\neq p}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\phi(q^m)}{q^{ms}} \\
&= \prod_{q\neq p}\left(1+\frac{q-1}{q^s}+\frac{q^2-q}{q^{2s}}+\frac{q^3-q^2}{q^{3s}}+\cdots\right) \\
&= \prod_{q\neq p}\left(1+\frac{1-\frac{1}{q}}{q^{s-1}}\left(1+\frac{1}{q^{s-1}}+\frac{1}{q^{2(s-1)}}+\cdots\right)\right) \\
&= \prod_{q\neq p}\left(1+\frac{1-\frac{1}{q}}{q^{s-1}}\frac{q^{s-1}}{q^{s-1}-1}\right) \\
&= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\frac{p^s-p}{p^s-1},
\end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$是Riemann zeta-函数. 根据Perron公式, 取$s_0 = 0$，$T = x$和$b = \frac{5}{2}$则可以推出

$$\sum_{\substack{n\leq x\\(n,p)=1}} \frac{\phi(n)}{n^s} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{5}{2}-iT}^{\frac{5}{2}+iT} \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\frac{p^s-p}{p^s-1}\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{T}\right).$$

将积分线从$\frac{5}{2} \pm iT$移到$\frac{3}{2} \pm iT$来估计主项

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{5}{2}-iT}^{\frac{5}{2}+iT} \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\frac{p^s-p}{p^s-1}\frac{x^s}{s}ds.$$

这时, 函数

$$f(s)=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\frac{p^s-p}{p^s-1}\frac{x^s}{s}$$

在$s=2$处有一个一阶极点, 其留数为$\frac{3px^2}{(p+1)\pi^2}$. 所以

$$\frac{1}{2i\pi}\left(\int_{\frac52-iT}^{\frac52+iT}+\int_{\frac52+iT}^{\frac32+iT}+\int_{\frac32+iT}^{\frac32-iT}+\int_{\frac32-iT}^{\frac52-iT}\right)\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\frac{p^s-p}{p^s-1}\frac{x^s}{s}=\frac{3px^2}{(p+1)\pi^2}.$$

注意到

$$\frac{1}{2i\pi}\left(\int_{\frac52+iT}^{\frac32+iT}+\int_{\frac32+iT}^{\frac32-iT}+\int_{\frac32-iT}^{\frac52-iT}\right)\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\frac{p^s-p}{p^s-1}\frac{x^s}{s}\ll x^{\frac32+\epsilon}.$$

那么

$$\sum_{\substack{n\le x\\(n,p)=1}}\phi(n)=\frac{3px^2}{(p+1)\pi^2}+O\left(x^{\frac32+\epsilon}\right).$$

引理2.3.1得证.

引理2.3.2 设α为一给定的整数, 对任意实数$x\ge1$, 则有

$$\sum_{\alpha\le\frac{\log x}{\log p}}\frac{\alpha}{p^\alpha}=\frac{p}{(p-1)^2}+O\left(x^{-1}\log x\right);$$

$$\sum_{\alpha\le\frac{\log x}{\log p}}\frac{\alpha}{p^{\frac{\alpha}{2}}}=\frac{p^{\frac12}}{\left(p^{\frac12}-1\right)^2}+O\left(x^{-\frac12}\log x\right).$$

证明: 根据几何级数的性质我们可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\le\frac{\log x}{\log p}}\frac{\alpha}{p^\alpha}&=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{t}{p^t}-\sum_{\alpha>\frac{\log x}{\log p}}\frac{\alpha}{p^\alpha}\\&=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{t}{p^t}-\frac{1}{p^{[\frac{\log x}{\log p}]}}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{[\frac{\log x}{\log p}]+t}{p^t}\\&=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{t}{p^t}+O\left(x^{-1}\left(\frac{[\frac{\log x}{\log p}]}{p-1}+\sum_{t=1}^{\infty}\frac{t}{p^t}\right)\right)\\&=\frac{p}{(p-1)^2}+O\left(x^{-1}\log x\right),\end{aligned}$$

及

$$\sum_{\alpha\le\frac{\log x}{\log p}}\frac{\alpha}{p^{\frac{\alpha}{2}}}=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{t}{p^{\frac{t}{2}}}-\sum_{\alpha>\frac{\log x}{\log p}}\frac{\alpha}{p^{\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t=1}^{\infty}\frac{t}{p^{\frac{t}{2}}}-\frac{1}{p^{\frac{1}{2}[\frac{\log x}{\log p}]}}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{[\frac{\log x}{\log p}]+t}{p^{\frac{t}{2}}}\\
&= \sum_{t=1}^{\infty}\frac{t}{p^{\frac{1}{2}}}+O\left(x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{[\frac{\log x}{\log p}]}{p^{\frac{1}{2}}-1}+\sum_{t=1}^{\infty}\frac{t}{p^{\frac{t}{2}}}\right)\right)\\
&= \frac{p^{\frac{1}{2}}}{\left(p^{\frac{1}{2}}-1\right)^2}+O\left(x^{-\frac{1}{2}}\log x\right).
\end{aligned}$$

引理2.3.2得证.

定理2.3.1 设p为一素数, $\phi(n)$是欧拉函数, 对任意实数$x \geq 1$, 我们有均值公式

$$\sum_{n\leq x}e_p(n)\phi(n)=\frac{3p}{(p^2-1)\pi^2}x^2+O\left(x^{\frac{3}{2}+\epsilon}\right).$$

证明: 根据$e_p(n)$的定义，以及引理2.3.1与引理2.3.2我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leq x}e_p(n)\phi(n)\\
&= \sum_{p^\alpha\leq x}\sum_{\substack{p^\alpha u\leq x\\(u,p)=1}}\alpha\phi(p^\alpha u)=\sum_{p^\alpha\leq x}\alpha\phi(p^\alpha)\sum_{\substack{u\leq\frac{x}{p^\alpha}\\(u,p)=1}}\phi(u)\\
&= \frac{p-1}{p}\sum_{\alpha\leq\frac{\log x}{\log p}}\alpha p^\alpha\left(\frac{3p}{(p+1)\pi^2}\left(\frac{x}{p^\alpha}\right)^2+O\left(\left(\frac{x}{p^\alpha}\right)^{\frac{3}{2}+\epsilon}\right)\right)\\
&= \frac{3(p-1)}{(p+1)\pi^2}x^2\sum_{\alpha\leq\frac{\log x}{\log p}}\frac{\alpha}{p^\alpha}+O\left(x^{\frac{3}{2}+\epsilon}\sum_{\alpha\leq\frac{\log x}{\log p}}\frac{\alpha}{p^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\\
&= \frac{3(p-1)}{(p+1)\pi^2}x^2\left(\frac{p}{(p-1)^2}+O\left(x^{-1}\log x\right)\right)\\
&\quad +O\left(x^{\frac{3}{2}+\epsilon}\left(\frac{p^{\frac{1}{2}}}{\left(p^{\frac{1}{2}}-1\right)^2}+O\left(x^{-\frac{1}{2}}\log x\right)\right)\right)\\
&= \frac{3p}{(p^2-1)\pi^2}x^2+O\left(x^{\frac{3}{2}+\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

于是完成了定理2.3.1的证明.

2.3.2 $e_p(n)$ 与因子乘积序列

设n为任意正整数, $P_d(n)$表示n的所有正因子的乘积, 即$P_d(n)=\prod_{p}d$. 例如：$P_d(1)=1, P_d(2)=2, P_d(3)=3, P_d(4)=8,\cdots$. 这里，我们仅讨论素因子最大指数序列$\{e_p(n)\}$与因子乘积序列$\{P_d(n)\}$的混合均值的分布性质.

引理2.3.3 对任意实数$x \geq 1$, 我们有

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,m)=1}} d(n) = x\left(\ln x + 2\gamma - 1 + 2\sum_{p|m} \frac{\ln p}{p-1}\right) \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

其中$\prod\limits_{p}$表示对所有的素数因子求积, γ是欧拉常数, ϵ为任意给定的正数.

证明: 设$T = x^{1/2}, A(s) = \prod\limits_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^2$. 根据Perron 公式(参阅文献[4] 的定理2) 我们有

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,m)=1}} d(n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT} \zeta^2(s) A(s) \frac{x^s}{s} ds + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

其中$\zeta(s)$是Riemann zeta-函数.

将积分线从$\frac{3}{2} \pm iT$移到$\frac{1}{2} \pm iT$. 这时, 函数$f(s) = \zeta^2(s)A(s)\frac{x^s}{s}$在$s = 1$处有一个二级极点, 且其留数为

$$x\left(\ln x + 2\gamma - 1 + 2\sum_{p|m} \frac{\ln p}{p-1}\right) \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2.$$

于是

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i\pi}\left(\int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT} + \int_{\frac{3}{2}+iT}^{\frac{1}{2}+iT} + \int_{\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}-iT} + \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{3}{2}-iT}\right) \zeta^2(s) A(s) \frac{x^s}{s} ds \\ &= x\left(\ln x + 2\gamma - 1 + 2\sum_{p|m} \frac{\ln p}{p-1}\right) \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i\pi}\left(\int_{\frac{3}{2}+iT}^{\frac{1}{2}+iT} + \int_{\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}-iT} + \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{3}{2}-iT}\right) \zeta^2(s) A(s) \frac{x^s}{s} ds \\ &\ll x^{\frac{1}{2}+\epsilon}. \end{aligned}$$

由以上结论立刻可得

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,m)=1}} d(n) = x\left(\ln x + 2\gamma - 1 + 2\sum_{p|m} \frac{\ln p}{p-1}\right) \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

引理2.3.3得证.

引理2.3.4 设p为素数, 对任意实数$x\geq 1$, 则有

$$\sum_{\alpha\leq x}\frac{\alpha}{p^{\alpha}}=\frac{p}{(p-1)^2}+O\left(\frac{x}{p^x}\right), \tag{2-2}$$

$$\sum_{\alpha\leq x}\frac{\alpha^2}{p^{\alpha}}=\frac{p^2+p}{(p-1)^3}+O\left(\frac{x^2}{p^x}\right), \tag{2-3}$$

$$\sum_{\alpha\leq x}\frac{\alpha^3}{p^{\alpha}}=\frac{p^3+4p^2+p}{(p-1)^4}+O\left(\frac{x^3}{p^x}\right). \tag{2-4}$$

证明: 这里我们仅证明式(2-3)和式(2-4). 首先来计算

$$f=\sum_{\alpha\leq n}\alpha^2/p^{\alpha}.$$

注意到恒等式

$$\begin{aligned}
f\left(1-\frac{1}{p}\right) &= \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\alpha^2}{p^{\alpha}}-\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\alpha^2}{p^{\alpha+1}}\\
&= \frac{1}{p}-\frac{n^2}{p^{n+1}}+\sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{(\alpha+1)^2-\alpha^2}{p^{\alpha+1}}\\
&= \frac{1}{p}-\frac{n^2}{p^{n+1}}+\sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{2\alpha+1}{p^{\alpha+1}},
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
&f\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\\
=&\left(\frac{1}{p}-\frac{n^2}{p^{n+1}}+\sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{2\alpha+1}{p^{\alpha+1}}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)\\
=&\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{n^2-n^2p}{p^{n+2}}+\sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{2\alpha+1}{p^{\alpha+1}}-\sum_{\alpha=2}^{n}\frac{2\alpha-1}{p^{\alpha+1}}\\
=&\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}+\frac{n^2-n^2p}{p^{n+2}}+\sum_{\alpha=2}^{n-1}\frac{2}{p^{\alpha+1}}+\frac{n^2-n^2p-(2n-1)p}{p^{n+2}}\\
=&\frac{1}{p}+\frac{2(p^{n-1}-1)}{p^{n+1}-p^n}+\frac{n^2-(n^2+2n-1)p}{p^{n+2}}.
\end{aligned}$$

于是

$$f = \left(\frac{1}{p}+\frac{2(p^{n-1}-1)}{p^{n+1}-p^n}+\frac{n^2-(n^2+2n-1)p}{p^{n+2}}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p}\right)^2}$$

$$= \frac{p}{(p-1)^2} + \frac{2(p^{n-1}-1)}{p^{n-2}(p-1)^3} + \frac{n^2-(n^2+2n-1)p}{p^n(p-1)^2}.$$

因此可得

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\le x}\frac{\alpha^2}{p^\alpha} &= \frac{p}{(p-1)^2} + \frac{2p}{(p-1)^3} + O\left(\frac{x^2}{p^x}\right)\\ &= \frac{p^2+p}{(p-1)^3} + O\left(\frac{x^2}{p^x}\right).\end{aligned}$$

引理2.3.4中的(2-3)式得证.

下面来证明式(2-4)式. 设

$$g = \sum_{\alpha\le n}\alpha^3/p^\alpha.$$

注意到恒等式

$$\begin{aligned}& g\left(1-\frac{1}{p}\right)\\ =\ & \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\alpha^3}{p^\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\alpha^3}{p^{\alpha+1}}\\ =\ & \frac{1}{p} - \frac{n^3}{p^{n+1}} + \sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{(\alpha+1)^3-\alpha^3}{p^{\alpha+1}}\\ =\ & \frac{1}{p} - \frac{n^3}{p^{n+1}} + \sum_{\alpha=2}^{n}\frac{3\alpha^2-3\alpha+1}{p^{\alpha+1}}\\ =\ & \frac{1}{p} - \frac{n^3}{p^{n+1}} + \frac{p^{n-1}-1}{p^{n+1}-p^n} - \left(\frac{2}{p^2} - \frac{n}{p^{n+1}} + \frac{p^{n-2}-1}{p^{n+1}-p^n}\right)\frac{3}{1-\frac{1}{p}}\\ & + \left(\frac{4}{p^2} - \frac{n^2}{p^{n+1}} + \left(\frac{5}{p^3} - \frac{2n-1}{p^{n+1}} + \frac{2(p^{n-3}-1)}{p^{n+1}-p^n}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)\frac{3}{1-\frac{1}{p}}\\ =\ & \frac{p^2+4p+10}{p(p-1)^2} + \frac{3n-3n^2+p^{n-1}-1+(3-6n)p}{p^n(p-1)}\\ & -\frac{n^3}{p^{n+1}} + \frac{6p(p^{n-3}-1)-3(p^{n-2}-1)(p-1)}{p^{n-1}(p-1)^3}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\le x}\frac{\alpha^3}{p^\alpha} &= \left(\frac{p^2+4p+10}{p(p-1)^2} + \frac{1}{p(p-1)} + \frac{9-3p}{p(p-1)^3}\right)\frac{p}{p-1} + O\left(\frac{x^3}{p^x}\right)\\ &= \frac{p^3+4p^2+p}{(p-1)^4} + O\left(\frac{x^3}{p^x}\right).\end{aligned}$$

引理2.3.4得证.

定理2.3.2 设p为一素数, 对任意实数$x \geq 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\leq x} e_p(P_d(n)) = \frac{x\ln x}{p(p-1)} + \frac{(p-1)^3(2\gamma-1)-\left(2p^4+4p^3+p^2-2p+1\right)\ln p}{p(p-1)^4}x + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

其中γ是欧拉常数, ϵ为任意给定的正数.

证明: 注意到恒等式$P_d(n) = n^{\frac{d(n)}{2}}$(参阅式(1-18)), 以及由$P_d(n)$和$a_p(n)$的定义并利用上面的两个引理可以得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leq x} e_p(P_d(n)) \\
= &\sum_{\substack{p^\alpha l\leq x\\(p,l)=1}} \frac{(\alpha+1)\alpha}{2}d(l) = \sum_{p^\alpha\leq x}\frac{(\alpha+1)\alpha}{2}\sum_{\substack{l\leq x/p^\alpha\\(p,l)=1}} d(l) \\
= &\sum_{\alpha\leq \ln x/\ln p}\frac{(\alpha+1)\alpha}{2}\left(\frac{x}{p^\alpha}\left(\ln\frac{x}{p^\alpha}+2\gamma-1+\frac{2\ln p}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\right) \\
&+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right) \\
= &\frac{x}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\left(\ln x+2\gamma-1+\frac{2\ln p}{p-1}\right)\sum_{\alpha\leq \ln x/\ln p}\frac{(\alpha+1)\alpha}{p^\alpha} \\
&-\frac{x\ln p}{2}\sum_{\alpha\leq\ln x/\ln p}\frac{(\alpha+1)\alpha^2}{p^\alpha}+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right) \\
= &\frac{x}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\left(\ln x+2\gamma-1+\frac{2\ln p}{p-1}\right) \\
&\times\left(\frac{p^2+p}{(p-1)^3}+\frac{p}{(p-1)^2}+O\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right)\right) \\
&-\frac{x\ln p}{2}\left(\frac{p^3+4p^2+p}{(p-1)^4}+\frac{p^2+p}{(p-1)^3}+O\left(\frac{\ln^3 x}{x}\right)\right)+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right) \\
= &\frac{x\ln x}{p(p-1)}+\frac{(p-1)^3(2\gamma-1)-\left(2p^4+4p^3+p^2-2p+1\right)\ln p}{p(p-1)^4}x \\
&+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

于是完成了定理2.3.2的证明.

根据定理2.3.2, 可以得到

推论2.3.1 对任意实数$x \geq 1$, 则有

$$\sum_{n\leq x} e_2(P_d(n)) = \frac{1}{2}x\ln x + \frac{2\gamma-65\ln 2-1}{2}x + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

$$\sum_{n\le x} e_3(P_d(n)) = \frac{1}{6}x\ln x + \frac{8\gamma-137\ln 3-4}{24}x + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

2.4 伪Smarandache函数的对偶

定义2.4.1 令Z_*表示伪*Smarandache* 函数的对偶, 其定义如下:

$$Z_*(n) = \max\{m\in N^* : \frac{m(m+1)}{2}|n\},$$

伪Smarandache函数的对偶是Jozsef Sandor在文献[14]里所提出来的. 显然, 伪Smarandache函数的对偶具有性质:

$$Z_*(1)=1;$$

及

$$Z_*(p) = \begin{cases} 2, & \text{如果 } p=3 \\ 1, & \text{如果 } p\ne 3. \end{cases}$$

其中p 为任意的素数.

本小节中，我们来讨论伪Smarandache函数的对偶$Z_*(n)$ 作用在简单数序列上的均值性质.

引理2.4.1 设$s\ge 1$为整数, p是素数, 则有

$$Z_*(p^s) = \begin{cases} 2, & \text{if } p=3 \\ ,1, & \text{if } p\ne 3. \end{cases}$$

证明: 由文献[14]的命题1立刻可以得出上式.

引理2.4.2 设q是素数且$p=2q-1$也是一个素数, 则有

$$Z_*(pq)=p.$$

证明: 由文献[14]的命题2立刻可得.

引理2.4.3 设$k\ge 0$及$x\ge 3$，p为素数. 则有

$$\sum_{p\le x} p^k = \frac{1}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\ln x} + \frac{1}{(k+1)^2}\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x} + O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right).$$

证明: 注意到$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)$. 由Abel恒等式我们有

$$\sum_{p\le x} p^k = \pi(x)x^k - \int_1^x \pi(t)kt^{k-1}dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x^{k+1}}{\ln x}+\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right)-k\int_2^x \frac{t^k}{\ln t}dt \\
&\quad -k\int_2^x \frac{t^k}{\ln^2 t}dt+O\left(\int_2^x \frac{t^k}{\ln^3 t}dt\right) \\
&= \frac{x^{k+1}}{\ln x}+\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right) \\
&\quad -\frac{k}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\ln x}-\frac{k^2+2k}{(k+1)^2}\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\int_2^x \frac{t^k}{\ln^3 t}dt\right) \\
&= \frac{1}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\ln x}+\frac{1}{(k+1)^2}\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right). \qquad (2\text{-}5)
\end{aligned}
$$

引理2.4.3得证.

引理2.4.4 设p和q均为素数, 则有

$$
\sum_{pq\le x} p = C_1\frac{x^2}{\ln x}+C_2\frac{x^2}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right),
$$

其中C_1, C_2皆是可计算的常数.

证明: 注意到当$x<1$时我们有$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^m+\cdots$, 则可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{p\le\sqrt{x}} p\sum_{q\le x/p} 1 \\
= &\sum_{p\le\sqrt{x}} p\left(\frac{\frac{x}{p}}{(\ln x-\ln p)}+\frac{\frac{x}{p}}{(\ln x-\ln p)^2}+O\left(\frac{\frac{x}{p}}{(\ln x-\ln p)^3}\right)\right) \\
= &\frac{x}{\ln x}\sum_{p\le\sqrt{x}}\left(1+\frac{\ln p}{\ln x}+\frac{\ln^2 p}{\ln^2 x}+\cdots+\frac{\ln^m p}{\ln^m x}+\cdots\right) \\
&+\frac{x}{\ln^2 x}\sum_{p\le\sqrt{x}}\left(1+2\frac{\ln p}{\ln x}+\cdots+m\frac{\ln^{m-1} p}{\ln^{m-1} x}+\cdots\right) \\
&+O\left(\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{x}{\ln^3\frac{x}{p}}\right)=B_1\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}+B_2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^3 x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^4 x}\right), \qquad (2\text{-}6)
\end{aligned}
$$

其中B_1, B_2皆是可计算的常数, 以及

$$
\begin{aligned}
&\sum_{q\le\sqrt{x}} 1\sum_{p\le x/q} p \\
= &\sum_{q\le\sqrt{x}}\left(\frac{(\frac{x}{q})^2}{2(\ln x-\ln q)}+\frac{(\frac{x}{q})^2}{4(\ln x-\ln q)^2}+O\left(\frac{(\frac{x}{q})^2}{(\ln x-\ln q)^3}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2}{2\ln x}\sum_{q\le\sqrt{x}}\frac{1}{q^2}\left(1+\frac{\ln q}{\ln x}+\frac{\ln^2 q}{\ln^2 x}+\cdots+\frac{\ln^m q}{\ln^m x}+\cdots\right)\\
&\quad+\frac{x^2}{4\ln^2 x}\sum_{q\le\sqrt{x}}\frac{1}{q^2}\left(1+2\frac{\ln q}{\ln x}+\cdots+m\frac{\ln^{m-1} q}{\ln^{m-1} x}+\cdots\right)\\
&\quad+O\left(\sum_{q\le\sqrt{x}}\frac{x^2}{q^2\ln^3\frac{x}{q}}\right)\\
&= \frac{x^2}{2\ln x}\sum_{q}\frac{1}{q^2}+\frac{x^2}{\ln^2 x}\left(\frac{1}{2}\sum_{q}\frac{\ln q}{q^2}+\frac{1}{4}\sum_{q}\frac{1}{q^2}\right)+O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right). \qquad (2\text{-}7)
\end{aligned}$$

所以由(2-6)及(2-7)我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{pq\le x} p &= \sum_{p\le\sqrt{x}} p\sum_{q\le x/p}1+\sum_{q\le\sqrt{x}}1\sum_{p\le x/q}p-(\sum_{p\le\sqrt{x}}p)(\sum_{q\le\sqrt{x}}1)\\
&= C_1\frac{x^2}{\ln x}+C_2\frac{x^2}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right), \qquad (2\text{-}8)
\end{aligned}$$

其中C_1, C_2皆是可计算的常数.

引理2.4.4得证.

定理2.4.1 设A表示所有简单数的集合. 对任意实数$x\ge 1$, 我们有

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}} Z_*(n)=C_1\frac{x^2}{\ln x}+C_2\frac{x^2}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right).$$

其中C_1, C_2皆是可计算的常数.

证明: 根据简单数的性质(引理1.3.1), 引理2.4.1—引理2.4.4我们立刻可得

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}} Z_*(n) &= \sum_{p\le x}Z_*(p)+\sum_{p^2\le x}Z_*(p^2)+\sum_{p^3\le x}Z_*(p^3)+\sum_{\substack{pq\le x\\ p\ne q}}Z_*(pq)\\
&= 3+\sum_{p\le x}1+\sum_{p^2\le x}1+\sum_{p^3\le x}1+\sum_{\substack{pq\le x\\ p\ne q}}p\\
&= 3+\sum_{p\le x}1+\sum_{p^2\le x}1+\sum_{p^3\le x}1+\sum_{pq\le x}p-\sum_{p^2\le x}p\\
&= C_1\frac{x^2}{\ln x}+C_2\frac{x^2}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right).
\end{aligned}$$

于是完成了定理2.4.1的证明.

2.5 下素数部分函数和上素数部分函数

定义2.5.1 对任意的正整数n, 下素数部分函数$P_-(n)$的定义为小于或等于x的最大素数. 上素数部分函数$P^+(n)$的定义为大于或等于x的最小素数.

定义2.5.2 对任意的正整数n, 素数可加补数$b(n)$定义为: 使$n+b(n)$成为一个素数的最小非负整数.

在文献[1]的第39个问题及第44个问题里，Smarandache教授建议研究这两个序列的性质. 非常有趣的是函数$P_-(n)$, $P^+(n)$和$b(n)$之间存在着某种联系. 本小节中主要是利用D.R.Heath Brown 的重要结果, 以及$b(n)$的性质揭示$P_-(n)$和$P^+(n)$的均值性质.

引理2.5.1 设$b(n)$表示素数可加补数, 则有估计式

$$\sum_{n\le x} b(n) \ll x^{\frac{23}{18}+\epsilon}.$$

证明: 设p_n表示第n个素数, 由$b(n)$的定义有

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} b(n) &= \sum_{1\le i\le \pi(x)} \sum_{p_i<n\le p_{i+1}} b(n) \\ &\le \sum_{1\le i\le \pi(x)} \sum_{p_i<n\le p_{i+1}} (p_{i+1}-p_i) \\ &\le \sum_{1\le i\le \pi(x)} (p_{i+1}-p_i)^2 . \end{aligned} \tag{2-9}$$

由文献[15]可得

$$\sum_{1\le i\le \pi(x)} (p_{i+1}-p_i)^2 \ll x^{\frac{23}{18}+\epsilon}, \tag{2-10}$$

所以由(2-9)及(2-10)立刻推出

$$\sum_{n\le x} b(n) \ll x^{\frac{23}{18}+\epsilon}.$$

引理2.5.1得证.

定理2.5.1 对任意实数$x\ge 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x} P_-(n) = \frac{x^2}{2} + O\left(x^{\frac{23}{18}+\epsilon}\right),$$

其中ϵ为任意给定的正数.

证明: 对任意实数$x\ge 1$, 由$P_-(n)$的定义我们有

$$\sum_{n\le x} P_-(n) = \sum_{1\le i\le \pi(x)} (p_{i+1}-p_i)p_i. \tag{2-11}$$

另一方面,

$$\sum_{n\le x}(n+b(n)) = \sum_{1\le i\le \pi(x)} \sum_{p_i<n\le p_{i+1}} (n+b(n))$$

$$= \sum_{1\le i\le\pi(x)} (p_{i+1}-p_i)p_{i+1}$$
$$= \sum_{1\le i\le\pi(x)} (p_{i+1}-p_i)^2 + \sum_{1\le i\le\pi(x)} (p_{i+1}-p_i)p_i. \quad (2\text{-}12)$$

于是根据(2-10)－(2-12) 则有

$$\sum_{n\le x} P_-(n) = \sum_{n\le x}(n+b(n)) - \sum_{1\le i\le\pi(x)} (p_{i+1}-p_i)^2$$
$$= \sum_{n\le x} n + \sum_{n\le x} b(n) - \sum_{1\le i\le\pi(x)} (p_{i+1}-p_i)^2 = \frac{x^2}{2} + O\left(x^{\frac{23}{18}+\epsilon}\right).$$

于是完成了定理2.5.1的证明.

定理2.5.2 对任意实数$x\ge 1$, 我们有

$$\sum_{n\le x} P^+(n) = \frac{x^2}{2} + O\left(x^{\frac{23}{18}+\epsilon}\right).$$

证明: 类似于定理2.5.1的证明，由$P^+(n)$的定义, (2-12)及引理2.5.1可得

$$\sum_{n\le x} P^+(n) = 6 + \sum_{1\le i\le\pi(x)} (p_{i+1}-p_i)p_{i+1}$$
$$= 6 + \sum_{n\le x}(n+b(n)) = \frac{x^2}{2} + O\left(x^{\frac{23}{18}+\epsilon}\right).$$

于是完成了定理2.5.2的证明.

2.6 k阶Smarandache Ceil函数的对偶

定义2.6.1 对任意给定的正整数n, 著名的k阶Smarandache Ceil函数的定义如下:

$$S_k(n) = \min\{x\in N \mid n \mid x^k\}\ (\forall n\in N^*).$$

例如, $S_2(1)=1$, $S_2(2)=2$, $S_2(3)=3$, $S_2(4)=2$, $S_2(5)=5$, $S_2(6)=6$, $S_2(7)=7$, $S_2(8)=4$, $S_2(9)=3$, $\cdots$.

定义2.6.2 对任意给定的正整数n, 著名的k阶Smarandache Ceil函数的对偶定义如下:

$$\overline{S}_k(n) = \max\{x\in N \mid x^k \mid n\}.$$

因为

$$(\forall a,b\in N^*)(a,b)=1,$$

所以有

$$\begin{aligned}\overline{S}_k(ab) &= \max\{x\in N \mid x^k \mid a\} \cdot \max\{x\in N \mid x^k \mid b\}\\ &= \overline{S}_k(a)\cdot\overline{S}_k(b),\end{aligned}$$

及

$$\overline{S}_k(p^\alpha) = p^{\lfloor \frac{\alpha}{k}\rfloor},$$

其中$\lfloor x\rfloor$表示小于或等于x的最大整数. 因此，由$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$为$n$的素数分解, 可得

$$\overline{S}_k(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}) = p^{\lfloor \frac{\alpha_1}{k}\rfloor}\cdots p^{\lfloor \frac{\alpha_r}{k}\rfloor} = \overline{S}_(p_1^{\alpha_1})\cdots \overline{S}_(p_r^{\alpha_r}).$$

所以$\overline{S}_k(n)$为一个可乘函数, 且该函数与Smarandache Ceil 函数有很大的联系. 这里，我们仅讨论$\sigma_\alpha(\overline{S}_k(n))$ 的均值性质.

定理2.6.1 设$\alpha\ge 0$，$\sigma_\alpha(n) = \sum\limits_{d|n} d^\alpha$, 则对任意实数$x\ge 1$及任意给定的正整数$k\ge 2$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\sigma_\alpha\left(\overline{S}_k(n)\right) = \begin{cases} \frac{k\zeta\left(\frac{\alpha+1}{k}\right)}{\alpha+1}x^{\frac{\alpha+1}{k}} + O\left(x^{\frac{\alpha+1}{2k}+\epsilon}\right), & \text{如果}\quad \alpha > k-1,\\ \zeta(k-\alpha)x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right), & \text{如果}\quad \alpha\le k-1.\end{cases}$$

其中$\zeta(s)$是*Riemann zeta-*函数, ϵ为任意给定的正数.

证明: 设

$$f(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sigma_\alpha\left(\overline{S}_k(n)\right)}{n^s}.$$

根据欧拉积公式及$\sigma_\alpha\left(\overline{S}_k(n)\right)$的可乘性我们可得

$$\begin{aligned} f(s) &= \prod_p\left(1 + \frac{\sigma_\alpha\left(\overline{S}_k(p)\right)}{p^s} + \cdots + \frac{\sigma_\alpha\left(\overline{S}_k(p^k)\right)}{p^{ks}} + \cdots\right)\\ &= \prod_p\left(1 + \frac{\sigma_\alpha(1)}{p^s} + \cdots + \frac{\sigma_\alpha(1)}{p^{(k-1)s}}\right.\\ &\qquad \left. + \frac{\sigma_\alpha(p)}{p^{ks}} + \cdots + \frac{\sigma_\alpha(p)}{p^{(2k-1)s}} + \frac{\sigma_\alpha\left(p^2\right)}{p^{2ks}} + \cdots\right)\\ &= \prod_p\left(\frac{1-\frac{1}{p^{ks}}}{1-\frac{1}{p^s}} + \frac{1-\frac{1}{p^{ks}}}{1-\frac{1}{p^s}}\left(\frac{1+p^\alpha}{p^{ks}} + \frac{1+p^\alpha+p^{2\alpha}}{p^{ks}} + \cdots\right)\right)\\ &= \zeta(s)\prod_p\left(1 + \frac{1}{p^{ks-\alpha}} + \frac{1}{p^{2(ks-\alpha)}} + \frac{1}{p^{3(ks-\alpha)}} + \cdots\right)\\ &= \zeta(s)\zeta(ks-\alpha),\end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$是Riemann zeta-函数. 显然, 有不等式

$$|\sigma_\alpha\left(\overline{S}_k(n)\right)| \le n, \qquad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha\left(\overline{S}_k(n)\right)}{n^\sigma}\right| < \frac{1}{\sigma-1-\frac{\alpha+1}{k}},$$

其中$\sigma > 1+\frac{\alpha+1}{k}$是$s$的实部. 所以由Perron公式我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{n\le x}\frac{\sigma_\alpha\left(\overline{S}_k(n)\right)}{n^{s_0}}\\ =\ &\frac{1}{2i\pi}\int_{b-iT}^{b+iT} f(s+s_0)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x^b B(b+\sigma_0)}{T}\right)\\ &+O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min(1,\frac{\log x}{T})\right)+O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min(1,\frac{x}{||x||})\right),\end{aligned}$$

其中N是距离x最近的整数, $\|x\| = |x-N|$. 取

$$s_0 = 0, b = \frac{\alpha+1}{k}+\frac{1}{\ln x}, T = x^{\frac{\alpha+1}{2k}}, H(x) = x, B(\sigma) = \frac{1}{\sigma-1-\frac{\alpha+1}{k}},$$

则

$$\sum_{n\le x}\sigma_\alpha\left(\overline{S}_k(n)\right) = \frac{1}{2i\pi}\int_{b-iT}^{b+iT}\zeta(s)\zeta(ks-\alpha)\frac{x^s}{s}ds + O\left(x^{\frac{\alpha+1}{2k}+\epsilon}\right).$$

再取$a = \frac{\alpha+1}{2k}+\frac{1}{\ln x}$, 将积分线从$s = b\pm iT$移到$s = a\pm iT$来估计主项

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{b-iT}^{b+iT}\zeta(s)\zeta(ks-\alpha)\frac{x^s}{s}ds.$$

这时, 当$\alpha > k-1$时, 函数

$$f(s) = \zeta(s)\zeta(ks-\alpha)\frac{x^s}{s}$$

在$s = \frac{\alpha+1}{k}$处有一个一阶极点, 且其留数为$\frac{k\zeta\left(\frac{\alpha+1}{k}\right)}{\alpha+1}x^{\frac{\alpha+1}{k}}$. 所以

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2i\pi}\left(\int_{b-iT}^{b+iT}+\int_{b+iT}^{a+iT}+\int_{a+iT}^{a-iT}+\int_{a-iT}^{b-iT}\right)\zeta(s)\zeta(ks-\alpha)\frac{x^s}{s}ds\\ &=\frac{k\zeta\left(\frac{\alpha+1}{k}\right)}{\alpha+1}x^{\frac{\alpha+1}{k}}.\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{1}{2i\pi}\left(\int_{b+iT}^{a+iT}+\int_{a+iT}^{a-iT}+\int_{a-iT}^{b-iT}\right)\zeta(s)\zeta(ks-\alpha)\frac{x^s}{s}ds \ll x^{\frac{\alpha+1}{2k}+\epsilon}.$$

则由以上结论我们立刻可得渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\sigma_\alpha\left(\overline{S}_k(n)\right)=\frac{k\zeta\left(\frac{\alpha+1}{k}\right)}{\alpha+1}x^{\frac{\alpha+1}{k}}+O\left(x^{\frac{\alpha+1}{2k}+\epsilon}\right).$$

于是完成了定理2.6.1的第一部分证明.

若$0\leq\alpha\leq k-1$, 则函数

$$f(s)=\zeta(s)\zeta(ks-\alpha)\frac{x^s}{s}$$

在$s=1$处有一个一阶极点, 且留数为$\zeta(k-\alpha)x$. 类似地, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\sigma_\alpha\left(\overline{S}_k(n)\right)=\zeta(k-\alpha)x+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

于是完成了定理2.6.1的第二部分证明.

定理2.6.2 设$d(n)$是*Dirichlet* 除数函数, 则对任意实数$x\geq 1$及任意给定的正整数$k\geq 2$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}d\left(\overline{S}_k(n)\right)=\zeta(k)x+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

证明: 在定理2.6.1中取$\alpha=0$, 我们很容易就可以得出定理2.6.2的结论.

在定理2.6.2中取$k=2,3$, 可以得出下面的推论:

推论2.6.1 对任意实数$x\geq 1$, 则有

$$\sum_{n\leq x}d\left(\overline{S}_2(n)\right)=\frac{\pi^2}{6}x+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

$$\sum_{n\leq x}d\left(\overline{S}_3(n)\right)=\frac{\pi^4}{90}x+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right)$$

其中$d(n)$是*Dirichlet* 除数函数

第三章 恒等与不等式

在前面两章中我们主要介绍了利用初等或解析的方法来研究数论函数的均值问题，但对于大多数问题而言，我们不仅仅局限于只给出数论函数的均值估计，而是期望得到更好更精确的递推关系或计算公式，或其它的算术性质，这一章里我们主要通过一些数论函数的恒等或不等式关系来说明研究这些性质的基本方法.

3.1 置换序列

定义3.1.1 对任意正整数n，置换序列$\{P(n)\}$定义如下：$P(1)=12$，$P(2)=1342$，$P(3)=135642$，$P(4)=13578642$，$P(5)=13579108642$，$\cdots$，$P(n)=135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 42$，$\cdots\cdots$.

关于文献[1]的第20个问题, F.Smarandache 教授建议解决问题: 在置换序列中是否存在完全次幂数? 他所给出的猜想是: 在置换序列中不存在完全次幂数! 对这一问题的研究是十分有意义的, 它可以帮助我们发现置换序列的一些新性质. 这一小节中, 我们将讨论置换序列$\{P(n)\}$ 的性质, 并说明当$n\le 9$时F.Smarandache 猜想是正确的. 这样就部分的解决了书[1]中的问题20, 更进一步, 我们也可易得到关于$P(n)$ 的一些新的分解性质.

定理3.1.1 在置换序列中不存在完全次幂数, 而且

$$P(n)=\frac{1}{81}(11\cdot 10^{2n}-13\cdot 10^n+2)=\overbrace{11\cdots 1}^{n}\times 1\overbrace{22\cdots 2}^{n},\quad n\le 9.$$

证明: 对任意正整数n, 我们有

$$\begin{aligned}P(n) &= 10^{2n-1}+3\times 10^{2n-2}+\cdots+(2n-1)\times 10^n\\ &\quad +2n\times 10^{n-1}+(2n-2)\times 10^{n-2}+\cdots+4\times 10+2\\ &= [10^{2n-1}+3\times 10^{2n-2}+\cdots+(2n-1)\times 10^n]\\ &\quad [+2n\times 10^{n-1}+(2n-2)\times 10^{n-2}+\cdots+4\times 10+2]\\ &\equiv S_1+S_2. \end{aligned}\tag{3-1}$$

现在我们来分别计算(3-1)式中的S_1及S_2. 注意到

$$\begin{aligned}9S_1 &= 10S_1-S_1=10^{2n}+3\times 10^{2n-1}+\cdots+(2n-1)\times 10^{n+1}\\ &\quad -10^{2n-1}-3\times 10^{2n-2}-\cdots-(2n-1)\times 10^n\\ &= 10^{2n}+2\times 10^{2n-1}+2\times 10^{2n-2}+\cdots+2\times 10^{n+1}-(2n-1)\times 10^n\\ &= 10^{2n}+2\times 10^{n+1}\times\frac{10^{n-1}-1}{9}-(2n-1)\times 10^n\end{aligned}$$

及

$$9S_2 = 10S_2-S_2=2n\times 10^n+(2n-2)\times 10^{n-1}+\cdots+4\times 10^2+2\times 10$$

$$
\begin{aligned}
&-2n\times 10^{n-1}-(2n-2)\times 10^{n-2}-\cdots-4\times 10-2\\
=&\quad 2n\times 10^{n}-2\times 10^{n-1}-2\times 10^{n-2}-\cdots-2\times 10-2\\
=&\quad 2n\times 10^{n}-2\times\frac{10^{n}-1}{9}.
\end{aligned}
$$

于是

$$S_1=\frac{1}{81}\times[11\times 10^{2n}-18n\times 10^{n}-11\times 10^{n}] \tag{3-2}$$

并且

$$S_2=\frac{1}{81}\times[18n\times 10^{n}-2\times 10^{n}+2]. \tag{3-3}$$

这样, 综合(3-1), (3-2)及(3-3)式我们有

$$
\begin{aligned}
P(n)\quad =&\quad S_1+S_2=\frac{1}{81}\times[11\times 10^{2n}-18n\times 10^{n}-11\times 10^{n}]\\
&+\frac{1}{81}\times[18n\times 10^{n}-2\times 10^{n}+2]\\
=&\quad \frac{1}{81}(11\cdot 10^{2n}-13\cdot 10^{n}+2)=\overbrace{11\cdots 1}^{n}\times 1\,\overbrace{22\cdots 2}^{n},\quad n\leq 9.
\end{aligned} \tag{3-4}
$$

由(3-4)式我们容易看出当$n\geq 2$时, $2|P(n)$但是$4\dagger P(n)$. 则由如果$n\geq 2$, 那么$P(n)$必不为完全次幂数. 事实上, 如果假定$P(n)$为为完全次幂数, 则存在正整数$m\geq 2$及$k\geq 2$使得$P(n)=m^k$. 由于$2|P(n)$, 因此m必为一个偶数. 所以可以推出$4|P(n)$. 这与当$n\geq 2$时$4\dagger P(n)$相矛盾. 注意到$P(1)$不是完全次幂数, 于是$P(n)$不为完全次幂数对所有$1\leq n\leq 9$均成立.

这样就完成了定理3.1.1的证明.

3.2 Smarandache反关联奇序列

定义3.2.1 *著名的Smarandache 反关联奇序列*$\{b_n\}$*定义如下:* 1, 31, 531, 7531, 97531, 1197531, 131197531, 15131197531, 1715131197531, $\cdots$.

在文献[16]的问题3中, Mihaly Bencze教授和Lucian Tutescu 教授建议我们研究这个序列的算术性质. 本节中主要讨论Smarandache反关联奇序列的算术性质, 并给出几个相关的递推公式及其通项的精确表达式. 即就是, 我们将证明下面的结论:

定理3.2.1 *设*$n\geq 2$*为任意的正整数且满足*$(2n-3)$*有*k*位数, 则Smarandache反关联奇序列*$\{b_n\}$*有递推公式*

$$b_n=b_{n-1}+(2n-1)\times 10^{\frac{10-10^k}{18}+k\times(n-1)},$$

其中$b_1=1$.

证明: (数学归纳法)

(i) 若$n=2,3$, 显然定理3.2.1 成立.

(ii) 假设当$n=m$时定理3.2.1 成立. 即以下递推公式

$$b_m = b_{m-1} + (2m-1)\times 10^{\frac{10-10^k}{18}+k\times(m-1)}$$

对于Smarandache 反关联奇序列$\{b_n\}$成立.

对比b_m和b_{m-1}的不同, 我们可知b_{m-1}有$\frac{10-10^k}{18}+k\times(m-1)$位数. 若$n=m+1$, 我们从下面两方面来看:

a) 若$2m-1$仍有k位数, 则可知b_m有$[\frac{10-10^k}{18}+k\times(m-1)+k]$位数. 对比$b_{m+1}$和$b_m$的不同, 立刻可推出

$$\frac{b_{m+1}-b_m}{2m+1} = 10^{\frac{10-10^k}{18}+k\times(m-1)+k}.$$

即,

$$b_{m+1} = b_m + (2m+1)\times 10^{\frac{10-10^k}{18}+k\times m}.$$

b) 若$2m-1$仍有$k+1$位数, 则可知b_m有$[\frac{10-10^k}{18}+k\times(m-1)+k+1]$位数. 回忆$(2m-3)$有$k$位数和$(2m-1)$有$k+1$位数, 这只会有如下情况

$$2m-3 = 10^k-1, 2m-1 = 10^k+1.$$

即$m=\frac{10^k}{2}+1$. 所以我们有

$$\begin{aligned}\frac{10-10^k}{18}+k\times(m-1)+(k+1) &= \frac{10-10^k}{18}+k\times\frac{10^k}{2}+(k+1)\\ &= \frac{10-10^{k+1}}{18}+(k+1)\times m\end{aligned}$$

对比b_{m+1}和b_m的不同, 可推出

$$\frac{b_{m+1}-b_m}{2m+1} = 10^{\frac{10-10^k}{18}+k\times(m-1)+(k+1)} = 10^{\frac{10-10^{k+1}}{18}+(k+1)\times m}.$$

即

$$b_{m+1} = b_m + (2m+1)\times 10^{\frac{10-10^{k+1}}{18}+(k+1)\times m}.$$

综合(i) 和(ii) 可得对任意的正整数n定理3.2.1 成立.

于是完成了定理3.2.1的证明.

定理3.2.2 设$(2n-3)$有k位数, 则*Smarandache* 反关联奇序列$\{b_n\}$中的第b_{n-1}项有$\frac{10-10^k}{18}+k\times(n-1)$位数.

证明: 利用定理3.2.1的结论并注意到b_n和b_{n-1}的不同, 我们立刻可得定理3.2.2 的结论.

引理3.2.1 设k,m,n为正整数且满足$m\le n$, 则有

$$S_{k(m,n)} = \frac{(2m-1)\times 10^{k(m-1)}}{1-10^k} + 2\times\frac{10^{km}[1-10^{k(n-m)}]}{(1-10^k)^2} + \frac{(2n-1)\times 10^{kn}}{1-10^k}.$$

证明: 由$S_{k(m,n)}$定义我们有

$$\begin{aligned} S_{k(m,n)} &= \sum_{i=m}^{n}(2i-1)\times 10^{k(i-1)} \\ &= (2m-1)\times 10^{k(m-1)}+(2m+1)\times 10^{km} \\ &\quad +\cdots+(2n-1)\times 10^{k(n-1)} \end{aligned}$$

及

$$10^k S_{k(m,n)} = (2m-1)\times 10^{km}+(2m+1)\times 10^{k(m+1)}+\cdots+(2n-1)\times 10^{kn}.$$

因此

$$\begin{aligned} (1-10^k)S_{k(m,n)} &= (2m-1)\times 10^{k(m-1)}+2\times[10^{km}+10^{k(m+1)} \\ &\quad +\cdots+10^{k(n-1)}]-(2n-1)\times 10^{kn} \\ &= (2m-1)\times 10^{k(m-1)}+2\times\frac{10^{km}[1-10^{k(n-m)}]}{1-10^k} \\ &\quad -(2n-1)\times 10^{kn}. \end{aligned}$$

所以我们有

$$S_{k(m,n)} = \frac{(2m-1)\times 10^{k(m-1)}}{1-10^k}+2\times\frac{10^{km}[1-10^{k(n-m)}]}{(1-10^k)^2}+\frac{(2n-1)\times 10^{kn}}{1-10^k}.$$

引理3.2.1得证.

定理3.2.3 设$S_{k(m,n)}=\sum_{i=m}^{n}(2i-1)\times 10^{k(i-1)}$,$n\geq 2$, 则有通项公式

$$b_n = 1+S_{1(2,6)}+10^{-5}\times S_{2(7,51)}+10^{-55}\times S_{3(52,501)}+\cdots+10^{\overbrace{-5\cdots 5}^{-(k-1)}}\times S_{k(m,n)}.$$

证明: 由定理3.2.1, 若$(2n-3)$有k位数, 令$(2n-3)$为有k位奇数的最小正整数(这里当$k=1$时$m=2$, 当$k>1$时$m=\frac{10^{k-1}}{2}+2$), 则根据引理3.2.1有

$$\begin{aligned} b_n &= 1+(2\times 2-1)\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times(2-1)} \\ &\quad +(2\times 3-1)\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times(3-1)} \\ &\quad +(2\times 4-1)\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times(4-1)}+(2\times 5-1)\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times(5-1)} \\ &\quad +(2\times 6-1)\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times(6-1)}+(2\times 7-1)\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times(7-1)} \\ &\quad +(2\times 8-1)\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times(8-1)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\cdots+(2\times 51-1)\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times(51-1)}\\
&+(2\times 52-1)\times 10^{\frac{10-10^3}{18}+3\times(52-1)}\\
&+(2\times 53-1)\times 10^{\frac{10-10^3}{18}+3\times(53-1)}\\
&+\cdots+(2\times m-1)\times 10^{\frac{10-10^k}{18}+k\times(m-1)}\\
&+\cdots+(2\times n-1)\times 10^{\frac{10-10^k}{18}+k\times(n-1)}+1+10^{\frac{10-10^1}{18}}\times S_{1(2,6)}\\
&+10^{\frac{10-10^2}{18}}\times S_{2(7,51)}+10^{\frac{10-10^3}{18}}\times S_{3(52,501)}\\
&+\cdots+10^{\frac{10-10^k}{18}}\times S_{k(m,n)}\\
&+1+10^{\frac{10-10^1}{18}}\times S_{1(2,6)}+10^{\frac{10-10^2}{18}}\times S_{2(7,51)}+10^{\frac{10-10^3}{18}}\times S_{3(52,501)}\\
&+\cdots+10^{\frac{10-10^k}{18}}\times S_{k(m,n)}\\
=\;&1+S_{1(2,6)}+10^{-5}\times S_{2(7,51)}+10^{-55}\times S_{3(52,501)}\\
&+\cdots+10^{\overbrace{-5\cdots 5}^{-(k-1)}}\times S_{k(m,n)}.
\end{aligned}
$$

这样就完成了定理3.2.3的证明.

引理3.2.2 设$S'_{k(n,m)}=\sum\limits_{i=m}^{n}i^2\times 10^{-ki}$, 则对任意正整数$k,m,n$我们有

$$
\begin{aligned}
S'_{k(m,n)}\quad=\quad&\frac{m^2\times 10^{-km}}{1-10^{-k}}+\frac{(2m+1)\times 10^{-k\times(m+1)}}{(1-10^{-k})^2}\\
&+2\times\frac{10^{-k(m+2)}[1-10^{-k(n-m-1)}]}{(1-10^{-k})^3}\\
&-\frac{(2n-1)\times 10^{-k\times(n+1)}}{(1-10^{-k})^2}-\frac{n^2\times 10^{-k(n+1)}}{1-10^{-k}}.
\end{aligned}
$$

证明: 由$S'_{k(m,n)}$的定义我们有

$$
\begin{aligned}
&S'_{k(m,n)}\\
=\;&m^2\times 10^{-k\times m}+(m+1)^2\times 10^{-k\times(m+1)}+(m+2)^2\times 10^{-k\times(m+2)}\\
&+\cdots+[m+(n-m)]^2\times 10^{-k[m+(n-m)]}
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
10^{-k}S'_{k(m,n)}\quad=\quad&m^2\times 10^{-k\times(m+1)}+(m+1)^2\times 10^{-k\times(m+2)}\\
&+\cdots+[m+(n-m)]^2\times 10^{-k[m+(n-m)+1]}.
\end{aligned}
$$

因此

$$(1-10^{-k})S'_{k(m,n)}$$

$$
\begin{aligned}
&= m^2 \times 10^{-k\times m} + (2m+1) \times 10^{-k\times(m+1)} + (2m+3) \times 10^{-k\times(m+2)} \\
&\quad + \cdots + \{2[m+(n-m)]-1\} \times 10^{-k[m+(n-m)]} \\
&\quad - [m+(n-m)]^2 \times 10^{-k[m+(n-m)]+1}.
\end{aligned}
$$

所以我们有

$$
\begin{aligned}
S'_{k(m,n)} &= \frac{m^2 \times 10^{-km}}{1-10^{-k}} + \frac{\displaystyle\sum_{i=m+1}^{n} (2i-1) \times 10^{-k\times i}}{1-10^{-k}} + \frac{n^2 \times 10^{-k(n+1)}}{1-10^{-k}} \\
&= \frac{m^2 \times 10^{-km}}{1-10^{-k}} + \frac{(2m+1) \times 10^{-k\times(m+1)}}{(1-10^{-k})^2} \\
&\quad + 2 \times \frac{10^{-k(m+2)}[1-10^{-k(n-m-1)}]}{(1-10^{-k})^3} \\
&\quad - \frac{(2n-1) \times 10^{-k\times(n+1)}}{(1-10^{-k})^2} - \frac{n^2 \times 10^{-k(n+1)}}{1-10^{-k}}.
\end{aligned}
$$

引理3.2.2得证.

引理3.2.3 设$S''_{k(n,m)} = \displaystyle\sum_{i=m}^{n} i \times 10^{-ki}$, 则对任意正整数$k, m, n$我们有

$$
S''_{k(m,n)} = \frac{m^2 \times 10^{-km}}{1-10^{-k}} + \frac{10^{-k(m+1)}[1-10^{-k(n-m)}]}{(1-10^{-k})^2} - \frac{n \times 10^{-k(n+1)}}{(1-10^{-k})}.
$$

证明: 由$S''_{k(m,n)}$的定义我们有

$$
\begin{aligned}
S''_{k(m,n)} &= m \times 10^{-km} + (m+1) \times 10^{-k(m+1)} \\
&\quad + \cdots + [m+(n-m)] \times 10^{-k[m+(n-m)]}
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
10^{-k} S''_{k(m,n)} &= m \times 10^{-k(m+1)} + (m+1) \times 10^{-k(m+2)} \\
&\quad + \cdots + [m+(n-m)] \times 10^{-k[m+(n-m)+1]}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
(1-10^{-k}) S''_{k(m,n)} &= m \times 10^{-km} + 10^{-k(m+1)} + \cdots + 10^{-k[m+(n-m)]} \\
&\quad - [m+(n-m)] \times 10^{-k[m+(n-m)+1]}.
\end{aligned}
$$

所以我们有

$$
S''_{k(m,n)} = \frac{m \times 10^{-km}}{1-10^{-k}} + \times \frac{10^{-k(m+1)}[1-10^{-k(n-m)}]}{(1-10^{-k})^2} - \frac{n \times 10^{-k(n+1)}}{(1-10^{-k})}.
$$

引理3.2.3得证.

定理3.2.4 令S_{50}表示*Smarandache* 反关联奇序列$\{b_n\}$中的前*50*项之和,则有

$$\begin{aligned} S_{50} &= \frac{11\times 45\times 10^6-201\times 50}{9}+\frac{-81\times 10^6+970}{9^2} \\ &+\frac{-4\times 10^6+4\times 100}{9^3}+\frac{99\times 10^{95}-13\times 44\times 10^7}{99} \\ &+\frac{95\times 10^{95}+73\times 10^9}{99^2}+\frac{-4\times 10^{95}+4\times 10^{11}}{99^3}. \end{aligned}$$

证明: 利用定理3.2.1可得

$$\begin{aligned} S_{50} &= b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{49}+b_{50} \\ &= 50+49\times(2\times 2-1)\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times(2-1)} \\ &\quad +48\times(2\times 3-1)\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times(3-1)} \\ &\quad +47\times(2\times 4-1)\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times(4-1)} \\ &\quad +46\times(2\times 5-1)\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times(5-1)} \\ &\quad +45\times(2\times 6-1)\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times(6-1)} \\ &\quad +44\times(2\times 7-1)\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times(7-1)} \\ &\quad +43\times(2\times 8-1)\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times(8-1)} \\ &\quad +\cdots+3\times(2\times 48-1)\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times(48-1)} \\ &\quad +2\times(2\times 49-1)\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times(49-1)} \\ &\quad +1\times(2\times 50-1)\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times(50-1)} \\ &= 50\times[2\times(51-50)-1]\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times(50-50)} \\ &\quad +49\times[2\times(51-49)-1]\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times(50-49)} \\ &\quad +48\times[2\times(51-48)-1]\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times(50-48)} \\ &\quad +47\times[2\times(50-47)-1]\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times(50-47)} \\ &\quad +\cdots+45\times[2\times(51-45)-1]\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times(51-45)} \\ &\quad +44\times[2\times(50-44)-1]\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times(50-44)} \\ &\quad +\cdots+2\times[2\times(51-2)-1]\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times(50-2)} \\ &\quad +1\times[2\times(51-1)-1]\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times(50-1)} \\ &= 101\times[50\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times 50-1\times 50}+49\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times 50-1\times 49} \\ &\quad +\cdots+45\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times 50-1\times 45} \\ &\quad +44\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times 50-2\times 44} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\cdots+2\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times 50-2\times 2} \\
& +1\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times 50-2\times 1}] \\
& -2\times[50^2\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times 50-1\times 50} \\
& +49^2\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times 50-1\times 49} \\
& +\cdots+45^2\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times 50-1\times 45} \\
& +44^2\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times 50-2\times 44} \\
& +\cdots+2^2\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times 50-2\times 2} \\
& +1^2\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times 50-2\times 1}] \\
= & \ 101\times\sum_{i=45}^{50} i\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times 50-1\times i} \\
& +101\times\sum_{i=1}^{44} i\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times 50-2\times i} \\
& -2\times\sum_{i=45}^{50} i^2\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times 50-1\times i} \\
& -2\times\sum_{i=1}^{44} i^2\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times 50-2\times i} \\
= & \ 101\times 10^{50}\times\sum_{i=45}^{50} i\times 10^{-i}+101\times 10^{95}\times\sum_{i=1}^{44} i\times 10^{-2\times i} \\
& -2\times 10^{50}\times\sum_{i=45}^{50} i^2\times 10^{-i}-2\times 10^{95}\times\sum_{i=1}^{44} i^2\times 10^{-2\times i}.
\end{aligned}
$$

所以，利用引理3.2.2和引理3.2.3立刻可以推出

$$
\begin{aligned}
S_{50} = & \frac{11\times 45\times 10^6-201\times 50}{9}+\frac{-81\times 10^6+970}{9^2} \\
& +\frac{-4\times 10^6+4\times 100}{9^3}+\frac{99\times 10^{95}-13\times 44\times 10^7}{99} \\
& +\frac{95\times 10^{95}+73\times 10^9}{99^2}+\frac{-4\times 10^{95}+4\times 10^{11}}{99^3}.
\end{aligned}
$$

于是完成了定理3.2.4的证明.

3.3 Smarandache LCM 比例序列

令$(x_1, x_2, ..., x_t)$ 和$[x_1, x_2, ..., x_t]$分别表示任意正整数$x_1, x_2, ..., x_t$的最大公因数和最小公倍数.

定义3.3.1 设$r>1$为一个正整数, 对任意的正整数n, 令

$$T(r,n)=\frac{[n,n+1,...,n+r-1]}{[1,2,...r]},$$

则将序列$SLR(r)=\{T(r,n)\}_\infty$称为r次*Smarandache LCM* 比例序列.

在文献[17]中, 乐茂华研究了$SLR(r)$的性质, 并给出了SLR(3)和SLR(4)的两个归约公式. 本节讨论了$SLR(5)$的计算问题, 首先有:

引理3.3.1 对任意的正整数a和b, 我们有$(a,b)[a,b]=ab$.

证明: (参阅文献[4]).

引理3.3.2 对任意的正整数s满足$s<t$, 我们有

$$(x_1,x_2,...,x_t)=((x_1,...,x_s),(x_{s+1},...,x_t))$$

及

$$[x_1,x_2,...,x_t]=[[x_1,...,x_s],[x_{s+1},...,x_t]].$$

证明: (参阅文献[4]).

引理3.3.3 对任意的正整数n, 我们有

$$T(4,n)=\begin{cases}\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3), & \text{如果 } n\equiv 1,\ 2 \mod 3;\\ \frac{1}{72}n(n+1)(n+2)(n+3), & \text{如果 } n\equiv 0 \mod 3.\end{cases}$$

证明: (参阅文献[17]).

定理3.3.1 对任意的正整数n, 我们有计算公式:

$$T(5,n)=\begin{cases}\frac{1}{1440}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), & \text{如果 } n\equiv 0,\ 8 \mod 12;\\ \frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), & \text{如果 } n\equiv 1,\ 7 \mod 12;\\ \frac{1}{720}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), & \text{如果 } n\equiv 2,\ 6 \mod 12;\\ \frac{1}{360}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), & \text{如果 } n\equiv 3,\ 5,\ 9,\ 11 \mod 12;\\ \frac{1}{480}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), & \text{如果 } n\equiv 4 \mod 12;\\ \frac{1}{240}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), & \text{如果 } n\equiv 10 \mod 12.\end{cases}$$

证明: 对任意的正整数n, 由任意正整数的最小公倍数性质可得

$$\begin{aligned}[n,n+1,n+2,n+3,n+4] &= [[n,n+1,n+2,n+3],n+4]\\ &= \frac{[n,n+1,n+2,n+3](n+4)}{([n,n+1,n+2,n+3],n+4)}.\end{aligned}$$

注意到$[1,2,3,4,5]=60$, $[1,2,3,4]=12$ 和

$$([n,n+1,n+2,n+3],n+4)=\begin{cases}4, & \text{如果}\ n\equiv 0,\ 4 \mod 12;\\ 1, & \text{如果}\ n\equiv 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9 \mod 12;\\ 6, & \text{如果}\ n\equiv 2 \mod 12;\\ 2, & \text{如果}\ n\equiv 6,\ 10 \mod 12;\\ 12, & \text{如果}\ n\equiv 8 \mod 12;\\ 3, & \text{如果}\ n\equiv 11 \mod 12,\end{cases}$$

再结合引理3.3.3容易推出定理3.3.1的结论.

于是就完成了定理3.3.1的证明.

3.4 因子乘积与真因子乘积序列

设n为正整数, $p_d(n)$表示n的所有正因子乘积, 即就是, $p_d(n)=\prod\limits_{d|n}d$. 例如, $p_d(1)=1$, $p_d(2)=2$, $p_d(3)=3$, $p_d(4)=8$, $p_d(5)=5$, $p_d(6)=36$, $\cdots$, $p_d(p)=p$, $\cdots$. $q_d(n)$表示n的所有正真因子乘积, 则$q_d(n)=\prod\limits_{d|n,d<n}d$. 例如, $q_d(1)=1$, $q_d(2)=1$, $p_d(3)=1$, $p_d(4)=2$, $p_d(5)=1$, $p_d(6)=6$, $\cdots$. 在文献[1] 的第25个与26个问题中, F.Smarandach 教授建议我们研究序列$\{p_d(n)\}$与$\{q_d(n)\}$的性质. 本小节中, 将利用初等方法研究序列$\{p_d(n)\}$与$\{q_d(n)\}$的性质, 并证明了Makowski与Schinzel 猜想在序列$\{p_d(n)\}$与$\{q_d(n)\}$中成立.

引理3.4.1 设对任意正整数n我们有恒定式

$$p_d(n)=n^{\frac{d(n)}{2}} \qquad \text{并且} \qquad q_d(n)=n^{\frac{d(n)}{2}-1},$$

其中$d(n)=\sum\limits_{d|n}1$是除数函数.

证明: 由$p_d(n)$的定义可知

$$p_d(n)=\prod_{d|n}d=\prod_{d|n}\frac{n}{d}.$$

因此

$$p_d^2(n)=\prod_{d|n}n=n^{d(n)}. \tag{3-5}$$

根据(3-5)式可以立刻得到

$$p_d(n)=n^{\frac{d(n)}{2}}$$

及

$$q_d(n)=\prod_{d|n,d<n}d=\frac{\prod\limits_{d|n}d}{n}=n^{\frac{d(n)}{2}-1}.$$

引理3.4.1得证.

引理3.4.2 对任意正整数n，令$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$且满足$\alpha_i \geq 2(i = 1,2,\cdots,s)$，$p_j(j = 1,2,\cdots,t)$是互不相同的素数且$p_1 < p_2 < \cdots < p_s$，则有估计

$$\sigma(\phi(n)) \geq \frac{6}{\pi^2}n.$$

证明： 根据Euler函数的性质, 我们有

$$\begin{aligned}\phi(n) &= \phi(p_1^{\alpha_1})\phi(p_2^{\alpha_2})\cdots\phi(p_s^{\alpha_s})\\ &= p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_s^{\alpha_s-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1).\end{aligned} \tag{3-6}$$

设$(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1) = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s}q_1^{r_1}q_2^{r_2}\cdots q_t^{r_t}$，并且$\beta_i \geq 0(i = 1,2,\cdots,s)$，$r_j \geq 1(j = 1,2,\cdots,t)$及$q_1 < q_2 < \cdots < q_t$是互不相同的素数. 于是, 由(3-6)式可以推出

$$\begin{aligned}\sigma(\phi(n)) &= \sigma(p_1^{\alpha_1+\beta_1-1}p_2^{\alpha_2+\beta_1-1}\cdots p_s^{\alpha_s+\beta_s-1}q_1^{r_1}q_2^{r_2}\cdots q_t^{r_t})\\ &= \prod_{i=1}^{s}\frac{p_i^{\alpha_i+\beta_i}-1}{p_i-1}\prod_{j=1}^{t}\frac{q_j^{r_j+1}-1}{q_j-1}\\ &= n\prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{1}{p_i^{\alpha_i+\beta_i}}\right)\prod_{j=1}^{t}\frac{1-\frac{1}{q_j^{r_j+1}}}{1-\frac{1}{q_j}}\\ &= n\prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{1}{p_i^{\alpha_i+\beta_i}}\right)\prod_{j=1}^{t}\left(1+\frac{1}{q_j}+\cdots+\frac{1}{q_j^{r_j}}\right)\\ &\geq n\prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{1}{p_i^{\alpha_i+\beta_i}}\right)\\ &\geq n\prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{1}{p_i^2}\right)\\ &\geq n\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}\right).\end{aligned}$$

注意到$\prod\limits_{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$，所以有

$$\sigma(\phi(n)) \geq n\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}n.$$

引理3.4.2得证.

定理3.4.1 对任意正整数n有不定式

$$\sigma(\phi(p_d(n))) \geq \frac{1}{2}p_d(n),$$

其中$\phi(k)$是$Euler$函数, $\sigma(k)$是除数和函数.

证明: 对于定理3.4.1我们将分n为素数与合数两种情况进行讨论.

当n为素数时, 则$d(n)=2$. 这时由引理3.4.1可得

$$p_d(n)=n^{\frac{d(n)}{2}}=n.$$

所以, 由此及$\phi(n)=n-1$立刻可以得到

$$\sigma(\phi(p_d(n)))=\sigma(n-1)=\sum_{d|n-1}\geq n-1\geq \frac{n}{2}=\frac{1}{2}p_d(n).$$

当n为合数时, 则$d(n)\geq 3$. 如果$d(n)=3$, 那么$n=p^2$(p 为素数). 于是

$$p_d(n)=n^{\frac{d(n)}{2}}=p^{d(n)}=p^3. \tag{3-7}$$

利用引理3.4.2及(3-7)式, 可以推出不等式

$$\sigma(\phi(p_d(n)))=\sigma(\phi(p^3))\geq \frac{6}{\pi^2}p^3\geq \frac{1}{2}p_d(n).$$

如果$d(n)=4$, 设$p_d(n)=n^{\frac{d(n)}{2}}=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$且满足$p_1<p_2<\cdots<p_s$, 那么我们有$\alpha_i\geq 2(i=1,2,\cdots,s)$. 又根据引理3.4.2可得不等式

$$\sigma(\phi(p_d(n)))\geq \frac{6}{\pi^2}p_d(n)\geq \frac{1}{2}p_d(n).$$

这样我们就完成了定理3.4.1的证明.

定理3.4.2 对任意正整数n, 则有

$$\sigma(\phi(q_d(n)))\geq \frac{1}{2}q_d(n).$$

证明: 这里我们仍将分两步分来讨论. 当n为素数时有

$$q_d(n)=n^{\frac{d(n)}{2}-1}=1.$$

由此可以推出

$$\sigma(\phi(q_d(n)))=1\geq \frac{1}{2}q_d(n).$$

当n为合数时, 则$d(n)\geq 3$. 所以我们将讨论以下四种情况:

(a) 当$d(n)=3$时, 所以$n=p^2$(p为素数). 于是

$$q_d(n)=n^{\frac{d(n)}{2}-1}=p^{d(n)-2}=p$$

利用上式及定理3.4.1的证明, 可以得到

$$\sigma(\phi(q_d(n)))\geq \frac{1}{2}q_d(n).$$

(b) 当$d(n)=4$时, 由引理3.4.1可知

$$q_d(n)=n^{\frac{d(n)}{2}-1}=n \tag{3-8}$$

并且$n=p^3$或者$n=p_1p_2$ (p, p_1及p_2均为素数且$p_1<p_2$). 如果$n=p^3$, 由(3-8)及引理3.4.2我们有

$$\begin{aligned}\sigma(\phi(q_d(n))) &= \sigma(\phi(n))=\sigma(\phi(p^3))\\ &\geq \frac{1}{2}p^3=\frac{1}{2}q_d(n).\end{aligned} \tag{3-9}$$

如果$n=p_1p_2$且$2=p_1<p_2$, 则p_2-1是一个偶数. 设$p_2-1=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}q_1^{r_1}\cdots q_t^{r_t}$ 并且满足$q_1<q_2<\cdots<q_t$是互不相同的素数, $r_j\geq 1(j=1,2,\cdots,t)$, $\beta_1\geq 1$, $\beta_2\geq 0$. 根据引理3.4.2的证明及(3-8)式, 可以推出

$$\begin{aligned}\sigma(\phi(q_d(n))) &= \sigma(\phi(n))\\ &= n\prod_{i=1}^{2}\left(1-\frac{1}{p_i^{1+\beta_i}}\right)\prod_{j=1}^{t}\left(1+\frac{1}{q_j}+\cdots+\frac{1}{q_j^{r_j}}\right)\\ &\geq n\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\\ &\geq n\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\\ &= \frac{1}{2}q_d(n).\end{aligned} \tag{3-10}$$

如果$n=p_1p_2$ 且$2<p_1<p_2$, 则p_1-1与p_2-1都是偶数. 设$(p_1-1)(p_2-1)=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}q_1^{r_1}\cdots q_t^{r_t}$并且满足$q_1<q_2<\cdots<q_t$是互不相同的素数, $r_j\geq 1(j=1,2,\cdots,t)$, $\beta_1,\beta_2\geq 0$. 根据引理3.4.2的证明及(3-8)式, 也可以得到

$$\begin{aligned}\sigma(\phi(q_d(n))) &= \sigma(\phi(n))\\ &= n\prod_{i=1}^{2}\left(1-\frac{1}{p_i^{1+\beta_i}}\right)\prod_{j=1}^{t}\left(1+\frac{1}{q_j}+\cdots+\frac{1}{q_j^{r_j}}\right)\\ &\geq n\prod_{i=1}^{2}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)\\ &\geq n\prod_{i=1}^{2}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\\ &\geq n\prod_{i=1}^{2}\left[\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\right]\\ &\geq n\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq n\frac{6}{\pi^2} \\ &\geq \frac{1}{2}q_d(n). \end{aligned} \tag{3-11}$$

综合(3-9)－(3-11)式, 可以推出

$$\sigma(\phi(q_d(n))) \geq \frac{1}{2}q_d(n) \qquad 如果 \qquad d(n)=4.$$

(c)　当$d(n)=5$时, 则$n=p^4$(p 为素数). 利用引理3.4.1及引理3.4.2很容易推出

$$\sigma(\phi(q_d(n))) = \sigma(\phi(p^6)) \geq \frac{6}{\pi^2}p^6 = \frac{1}{2}q_d(n).$$

(d)　当$d(n)\geq 6$时, 则由引理3.4.1及引理3.4.2有

$$\sigma(\phi(q_d(n))) \geq \frac{1}{2}q_d(n).$$

这样就完成了定理3.4.2的证明.

3.5　Smarandache第57个问题

对任意正整数n, 设r_1为正整数且满足: 集合$\{1,2,\cdots,r_1\}$可被分拆为n类且每一类中均不含有元素x, y, z使得$x^y=z$ 成立, 设r_2为正整数且满足: 集合$\{1,2,\cdots,r_2\}$ 被分拆为n类且每一类中均不含有元素x, y, z使得$x+y=z$成立. 在文献[1]中, Schur建议我们去寻找最大的r_1及r_2. 对这些问题的研究是有趣的, 它可以帮助我们来研究一些重要的分拆问题. 本小节中, 我们利用初等方法研究了Schur所建议的问题并给出r_1及r_2两个精确的下界.

定理3.5.1　*对充分大的整数n, 设r_1为正整数且满足: 集合$\{1,2,\cdots,r_1\}$可被分拆为n 类且每一类中均不含有元素x, y, z使得$xy=z$成立. 则对任意给定的正数ϵ, 我们有*

$$r_1 \geq n^{2(1-\varepsilon)(n-1)}.$$

证明： 设$r_1=\left[n^{2(1-\varepsilon)(n-1)}\right]$且按如下方法将集合$\{1,2,\cdots,\left[n^{2(1-\varepsilon)(n-1)}\right]\}$分

拆为n 类:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{第1 类:} & 1, & \left[n^{(1-\varepsilon)(n-1)}\right], & \left[n^{(1-\varepsilon)(n-1)}+1\right], & \cdots, & \left[n^{2(1-\varepsilon)(n-1)}\right]. \\
\text{第2 类:} & 2, & n+1, & n+2, & \cdots, & \left[\frac{\left(n^{(1-\varepsilon)(n-1)}-1\right)}{n(n-1)\cdots 3}\right]. \\
\text{第3 类:} & 3, & \left[\frac{\left(n^{(1-\varepsilon)(n-1)}-1\right)}{n(n-1)\cdots 3}\right]+1, & \left[\frac{\left(n^{(1-\varepsilon)(n-1)}-1\right)}{n(n-1)\cdots 3}\right]+2, & \cdots, & \left[\frac{\left(n^{(1-\varepsilon)(n-1)}-1\right)}{n(n-1)\cdots 4}\right]. \\
\vdots & & & & & \\
\text{第k 类:} & k, & \left[\frac{\left(n^{(1-\varepsilon)(n-1)}-1\right)}{n(n-1)\cdots k}\right]+1, & \left[\frac{\left(n^{(1-\varepsilon)(n-1)}-1\right)}{n(n-1)\cdots k}\right]+2, & \cdots, & \left[\frac{\left(n^{(1-\varepsilon)(n-1)}-1\right)}{n(n-1)\cdots (k+1)}\right]. \\
\vdots & & & & & \\
\text{第n 类:} & n, & \left[\frac{\left(n^{(1-\varepsilon)(n-1)}-1\right)}{n}\right]+1, & \left[\frac{\left(n^{(1-\varepsilon)(n-1)}-1\right)}{n}\right]+2, & \cdots, & \left[n^{(1-\varepsilon)(n-1)}-1\right].
\end{array}
$$

其中$[y]$表示y的整数部分.

显然, 第k类中不包含整数x, y, z使得$xy=z$成立$(k=1,3,4,\cdots,n)$. 事实上, 对任意整数$x,y,z\in$ 第k 类, $k=3,4,\cdots,n$, 我们有

$$xy\geq k\times\left(\left[\frac{\left(n^{(1-\varepsilon)(n-1)}-1\right)}{n(n-1)\cdots k}\right]+1\right)>\left[\frac{\left(n^{(1-\varepsilon)(n-1)}-1\right)}{n(n-1)\cdots(k+1)}\right]\geq z.$$

另一方面, 当$n\to\infty$ 时, $\left[\frac{\left(n^{(1-\varepsilon)(n-1)}-1\right)}{n(n-1)\cdots 3}\right]$趋近于零, 则对于充分大的整数$n$, 第2类中只含有整数2.

这样就完成了定理3.5.1的证明.

利用不同的分拆方法我们可以将定理3.5.1的结果改进如下：

定理3.5.2 *对充分大的整数n, 设r_1为正整数且满足: 集合$\{1,2,\cdots,r_1\}$可被分拆为n 类且每一类中均不含有元素x, y, z使得$x^y=z$成立. 则对任意整数m且$m\leq n+1$我们有估计*

$$r_1\geq n^{m+1}.$$

证明: 设$r_1=n^{m+1}$且按如下方法将集合$\{1,2,\cdots,r_1\}$分拆为n类:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{第1 类:} & 1, & n+1, & n+2, & \cdots, & n^m. \\
\text{第2 类:} & 2, & n^m+1, & n^m+2, & \cdots, & 2n^m. \\
\text{第3 类:} & 3, & 2n^m+1, & 2n^m+2, & \cdots, & 3n^m. \\
\vdots & & & & & \\
\text{第k 类:} & k, & (k-1)n^m+1, & (k-1)n^m+2, & \cdots, & kn^m. \\
\vdots & & & & & \\
\text{第n 类:} & n, & (n-1)n^m+1, & (n-1)n^m+2, & \cdots, & n^{m+1}.
\end{array}
$$

显然, 第k类中不包含整数x, y, z使得$x^y = z$成立($k = 2, 3, 4, \cdots, n$). 事实上, 对任意整数$x, y, z \in$ 第k 类, $k = 2, 3, 4, \cdots, n$, 我们有

$$x^y \geq ((k-1)n^m + 1)^k > k(k-1)^{k-1} n^{m(k-1)} \geq kn^m \geq z,$$

或

$$x^y \geq k^{(k-1)n^m+1} > kn^m \geq z.$$

另一方面, 当$n \geq m-1$时, 我们有$(n+2)^{(n+1)} > n^m$及$(n+1)^{(n+2)} > n^m$. 于是, 当$n \geq m-1$时第1类中也不包含整数x, y, z使得$x^y = z$成立.

这样就完成了定理3.5.2的证明.

定理3.5.3 对充分大的整数n, 设r_2为正整数且满足: 集合$\{1, 2, \cdots, r_2\}$ 被分拆为n类且每一类中均不含有元素x, y, z使得$x + y = z$成立. 则我们有估计

$$r_2 \geq 2^{n+1}.$$

证明: 设$r_2 = 2^{n+1}$且按如下方法将集合$\{1, 2, \cdots, r_2\}$分拆为n类:

第1 类:	$1,$	$2,$			$\sum\limits_{i=0}^{n} 2^i$
第2 类:	$2+1,$	$2^2,$	$2^2+1,$	$2^2+2,$	$2^{n+1}.$
第3 类:	$2^2+2+1,$	$2^3,$	$2^3+1,$	$\cdots,$	$2^3+2^2+2.$
第4 类:	$2^3+2^2+2+1,$	$2^4,$	$2^4+1,$	$\cdots,$	$2^4+2^3+2^2+2.$
$\vdots$					
第k 类:	$2^{k-1}+2^{k-2}+\cdots+2+1,$	$2^k,$	$2^k+1,$	$\cdots,$	$\sum\limits_{i=1}^{k} 2^i$
$\vdots$					
第n 类:	$2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1,$	$2^n,$	$2^n+1,$	$\cdots,$	$\sum\limits_{i=1}^{n} 2^i$

显然, 第k类中不包含整数x, y, z使得$x + y = z$成立($k = 3, 4, \cdots, n$). 事实上, 对任意整数$x, y, z \in$ 第k 类, $k = 3, 4, \cdots, n$, 我们有

$$(2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2 + 1) + 2^k > 2^k + 2^{k-1} + \cdots + 2^2 + 2.$$

另一方面, 当$n \geq 3$时, 则$(2^2+1)+(2^2+2) < 2^{n+1}$及$1+2 < 2^n+2^{n-1}+\cdots+2+1$. 于是, 当$n \geq 3$时第1类和第2类中也不包含整数$x$, y, z使得$x + y = z$成立.

这样我们就完成了定理3.5.3 的证明.

3.6 Smarandache函数的性质

对任意正整数n, Smarandache 数$S(n)$定义如下:

$$S(n) = \min\{m : n \mid m!\}.$$

设$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$为$n$的标准因子分解式, 则由$S(n)$定义及其性质容易推出

$$S(n) = \max_{1 \le i \le k} \{S(p_i^{\alpha_i})\}.$$

关于这个函数及其它Smarandache类型的函数的性质, 可参阅文献[18]−[21]. 令$p(n)$表示n的最大素因子, 显然有$S(n) \ge p(n)$. 事实上对几乎所有的n有$S(n) = p(n)$, 在文献[22]中Erdös给出了这个结论. 这表明用$N(x)$表示满足$S(n) \neq p(n)$的$n \le x$的个数, 那么$N(x)$为$o(x)$. 除了$n = 4, n = p$外, 很容易得出$S(p) = p$ and $S(n) < n$. 所以$S(n)$和$\pi(x)$联系相当紧密, 即

$$\pi(x) = -1 + \sum_{n=2}^{[x]} \left[\frac{S(n)}{n} \right],$$

其中$\pi(x)$表示不超过x的素数的个数, $[x]$表示小于等于x的最大正整数. 对任意两个正整数m和n, 你能判别$S(mn) = S(m) + S(n)$的正确与否吗？这个问题比较难回答. 对某些m和n这个等式是正确的, 但对某些m和n该等式就是错误的.

关于这个问题, 在文献[23]中J.Sandor证明了一个非常重要的结论. 即对任意的正整数n和任意的正整数$m_1, m_2, \cdots, m_k$有不等式

$$S\left(\prod_{i=1}^{k} m_i\right) \le \sum_{i=1}^{k} S(m_i).$$

本小节进一步讨论了Smarandache 函数类似于文献[23] 的性质，得到以下两个结论:

定理3.6.1 对任意的整数$k \ge 2$和任意的正整数$m_1, m_2, \cdots, m_k$有不等式

$$S\left(\prod_{i=1}^{k} m_i\right) \le \prod_{i=1}^{k} S(m_i).$$

证明: 首先我们证明定理3.6.1的一个特殊情形. 即对任意两个正整数m和n有

$$S(m)S(n) \ge S(mn).$$

如果$m = 1$ (或$n = 1$), 那么显然有$S(m)S(n) \ge S(mn)$. 现在假定$m \ge 2$ 且$n \ge 2$使得$S(m) \ge 2$, $S(n) \ge 2$, $mn \ge m + n$ 和$S(m)S(n) \ge S(m) + S(n)$成立. 注意到$m|S(m)!$, $n|S(n)!$, 从而可得

$$mn|S(m)!S(n)!|((S(m) + S(n))!.$$

又因为$S(m)S(n) \ge S(m) + S(n)$, 所以有

$$(S(m) + S(n))!|(S(m)S(n))!.$$

从$S(n)$的定义立刻可得

$$S(mn) \le S(m)S(n).$$

根据上式及数学归纳法可的定理3.6.1的结论.

定理3.6.2 对任意的整数$k \ge 2$可以找到无限组数$m_1, m_2, \cdots, m_k$ 使得

$$S\left(\prod_{i=1}^{k} m_i\right) = \sum_{i=1}^{k} S(m_i).$$

证明: 对任意的整数n和素数p, 如果$p^\alpha \| n!$, 那么可得

$$\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j}\right].$$

设n_i是使得$i \ne j$时$n_i \ne n_j$的正整数, 其中$1 \le i, j \le k$, $k \ge 2$是任意正整数. 因为

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{p^{n_i}}{p^r}\right] = p^{n_i - 1} + p^{n_i - 2} + \cdots + 1 = \frac{p^{n_i} - 1}{p - 1}.$$

为了计算方便, 可令$u_i = \frac{p^{n_i} - 1}{p - 1}$. 于是有

$$S(p^{u_i}) = p^{n_i}, \qquad i = 1, 2, \cdots, k. \tag{3-12}$$

一般来说, 同样可得以下结论

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{\sum_{i=1}^{k} p^{n_i}}{p^r}\right] = \sum_{i=1}^{k} \frac{p^{n_i} - 1}{p - 1} = \sum_{i=1}^{k} u_i.$$

所以

$$S\left(p^{u_1 + u_2 + \cdots + u_k}\right) = \sum_{i=1}^{k} p^{n_i}. \tag{3-13}$$

联合式(3-12)和(3-13)立刻可得

$$S\left(\prod_{i=1}^{k} p^{u_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} S(p^{u_i}).$$

令$m_i = p^{u_i}$, 注意到有无限个素数p和n_i很容易得出定理3.6.2的结论.

于是完成了定理3.6.2的证明.

第四章 无穷级数及其性质

1737年，Euler 证明：由

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\qquad\text{对实数}\ \ s>1$$

给定的zeta 函数$\zeta(s)\to\infty$ (当$s\to 1$ 时)，并利用上述结论推出对所有素数展开的级数$\sum p^{-1}$发散的方法证明了无穷多个素数存在性的Euler 定理. 1837 年，由于研究级数

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

其中χ是一个Dirichlet 特征并且$s>1$, Dirichlet 证明了他的关于算术级数里素数的著名定理. 上述级数称为具有系数$f(n)$的Dirichlet 级数，其中$f(n)$ 是一个数论函数，它们成为解析数论里很有用的工具之一. 因此对于无穷级数及Dirichlet 级数性质的研究很有意义. 这一章中我们主要介绍一些简单的无穷级数的收敛性质，通过这些问题的讨论使大家了解研究无穷级数性质的一般方法.

4.1 关于k 次补数的几个恒等式

在定义2.1.1中我们已经给出了k次补数的定义，我们分别称$b_2(n)$, $b_3(n)$, $b_4(n)$为平方补数, 立方补数和四次补数. 这一小节中我们主要是利用解析方法计算级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(nb_k(n))^s},$$

其中$b_k(n)$是任意正整数n的k次补数, s是满足$\mathrm{Re}(s)\geq 1$的复数, 并得到了:

定理4.1.1 对任意复数s且满足$Re(s)\geq 1$, 我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(nb_2(n))^s}=\frac{\zeta^2(2s)}{\zeta(4s)},$$

其中$\zeta(s)$是*Riemann zeta*-函数.

证明: 对任意正整数n, 记$n=l^2m$, 其中m是无平方因子数(即$p\dagger m$且$p^2\dagger m$). 由$b_2(n)$的定义可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(nb_2(n))^s} &= \sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{|\mu(m)|}{(l^2m\cdot m)^s}=\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{|\mu(m)|}{l^{2s}m^{2s}}\\ &= \zeta(2s)\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{2s}}\right)=\frac{\zeta^2(2s)}{\zeta(4s)},\end{aligned}$$

其中$\mu(n)$表示Mö bius 函数.

于是完成了定理4.1.1的证明.

定理4.1.2 对任意复数s且满足$Re(s) \geq 1$, 则有恒等式

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(nb_3(n))^s} = \frac{\zeta^2(3s)}{\zeta(6s)} \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{3s}+1}\right),$$

其中$\prod\limits_p$表示对所有的素数因子求积.

证明: 对任意正整数n, 我们可以将它写为$n = l^3m^2r$, 其中rm是无平方因子数. 根据$b_3(n)$的定义, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(nb_3(n))^s} &= \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,r)=1}}^{+\infty} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{|\mu(m)|\,|\mu(r)|}{(l^3m^2r \cdot mr^2)^s} \\
&= \zeta(3s) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{|\mu(m)|}{m^{3s}} \sum_{\substack{r=1 \\ (m,r)=1}}^{+\infty} \frac{|\mu(r)|}{r^{3s}} \\
&= \zeta(3s) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{|\mu(m)|}{m^{3s}} \prod_{p \dagger m} \left(1 + \frac{1}{p^{3s}}\right) \\
&= \frac{\zeta^2(3s)}{\zeta(6s)} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{|\mu(m)|}{m^{3s}} \prod_{p|m} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{p^{3s}}\right)} \\
&= \frac{\zeta^2(3s)}{\zeta(6s)} \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{3s}\left(1 + \frac{1}{p^{3s}}\right)}\right) \\
&= \frac{\zeta^2(3s)}{\zeta(6s)} \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{3s}+1}\right).
\end{aligned}$$

于是完成了定理4.1.2的证明.

定理4.1.3 对任意复数s且满足$Re(s) \geq 1$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(na_4(n))^s} = \frac{\zeta^2(4s)}{\zeta(8s)} \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{4s}+1}\right)\left(1 + \frac{1}{p^{4s}+2}\right).$$

证明: 对任意正整数n, 令$n = l^4m^3r^2t$, 其中$(m,r) = 1, (mr,t) = 1$且mrt是无平方因子数. 由$b_4(n)$的定义, 可以得到

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(nb_4(n))^s}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{\substack{r=1\\(m,r)=1\\(mr,t)=1}}^{+\infty}\sum_{t=1}^{+\infty}\frac{|\mu(m)|\,|\mu(r)|\,|\mu(t)|}{(l^4m^3r^2t\cdot mr^2t^3)^s}\\
&= \zeta(4s)\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{\substack{r=1\\(m,r)=1}}^{+\infty}\frac{|\mu(m)|\,|\mu(r)|}{m^{4s}r^{4s}}\sum_{\substack{t=1\\(mr,t)=1}}^{+\infty}\frac{|\mu(t)|}{t^{4s}}\\
&= \frac{\zeta^2(4s)}{\zeta(8s)}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{\substack{r=1\\(m,r)=1}}^{+\infty}\frac{|\mu(m)|\,|\mu(r)|}{m^{4s}r^{4s}}\prod_{p|mr}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{p^{4s}}\right)}\\
&= \frac{\zeta^2(4s)}{\zeta(8s)}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{\substack{r=1\\(m,r)=1}}^{+\infty}\frac{|\mu(m)|\,|\mu(r)|}{m^{4s}r^{4s}}\prod_{p|m}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{p^{4s}}\right)}\prod_{p|r}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{p^{4s}}\right)}\\
&= \frac{\zeta^2(4s)}{\zeta(8s)}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{|\mu(m)|}{m^{4s}}\prod_{p|m}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{p^{4s}}\right)}\prod_{p\nmid m}\left(1+\frac{1}{p^{4s}+1}\right)\\
&= \frac{\zeta^2(4s)}{\zeta(8s)}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{|\mu(m)|}{m^{4s}}\prod_{p|m}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{p^{4s}}\right)}\frac{\prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^{4s}+1}\right)}{\prod_{p|m}\left(1+\frac{1}{p^{4s}+1}\right)}\\
&= \frac{\zeta^2(4s)}{\zeta(8s)}\prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^{4s}+1}\right)\left(1+\frac{1}{p^{4s}+2}\right).
\end{aligned}
$$

于是完成了定理4.1.3的证明.

在以上定理中分别取$s=1,2$, 并注意到

$$
\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\quad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\quad \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945},\quad \zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450},
$$
$$
\zeta(12)=\frac{691\pi^{12}}{638512875},\qquad \zeta(16)=\frac{3617\pi^{16}}{325641566250}.
$$

我们即刻可得到以下两个推论

推论4.1.1

$$
\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{na_2(n)}=\frac{5}{2},
$$
$$
\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{na_3(n)}=\frac{\zeta^2(3)}{\zeta(6)}\prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^3+1}\right),
$$
$$
\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{na_4(n)}=\frac{7}{6}\prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^4+1}\right)\left(1+\frac{1}{p^4+2}\right).
$$

推论4.1.2

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(na_2(n))^2}=\frac{7}{6},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(na_3(n))^2}=\frac{715}{691}\prod_p\left(1+\frac{1}{p^6+1}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(na_4(n))^2}=\frac{7293}{7234}\prod_p\left(1+\frac{1}{p^8+1}\right)\left(1+\frac{1}{p^8+2}\right).$$

4.2 包含Euler函数的方程

对任意正整数$n\geq 1$, Euler函数$\phi(n)$表示所有不超过n且与n互素的正整数的个数. 类似的, 我们也定义函数$J(n)$为模n所有原Dirichlet特征的个数. 设A表示所有满足方程$\phi^2(n)=nJ(n)$的正整数n的集合. 本节中, 我们利用初等方法研究一个包含方程$\phi^2(n)=nJ(n)$的解的新Dirichlet级数的同余性质, 并给出一个有趣的恒等式. 即就是, 我们证明了以下结论:

定理4.2.1 对任意实数$s>\frac{1}{2}$, 我们有恒等式

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)},$$

其中$\zeta(s)$是*Riemann zeta-*函数.

证明: 首先, 注意到函数$\phi(n)$与$J(n)$均为可乘函数, 并且对所有正整数$\alpha>1$及素数p, 当$n=p^\alpha$时, $J(p)=p-2$, $\phi(p)=p-1$, $J(p^\alpha)=p^{\alpha-2}(p-1)^2$ 及$\phi(p^\alpha)=p^{\alpha-1}(p-1)$. 于是, 我们将分三种情况来讨论方程$\phi^2(n)=nJ(n)$解的问题.

(a) 显然, $n=1$是方程$\phi^2(n)=nJ(n)$的一个解.

(b) 如果$n>1$, 令$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为n的标准因子分解式且满足$\alpha_i\geq 2(i=1,2,\cdots\cdots,k)$, 那么我们有

$$J(n)=p_1^{\alpha_1-2}(p_1-1)^2\cdots p_k^{\alpha_k-2}(p_k-1)^2$$

及

$$\phi^2(n)=\left(p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)\right)^2.$$

在这种情况下, n仍然是方程$\phi^2(n)=nJ(n)$的解.

(c) 如果$n=p_1p_2\cdots p_rp_{r+1}^{\alpha_{r+1}}\cdots p_k^{\alpha_k}$, 并且满足$p_1<p_2<\cdots<p_r$与$\alpha_j>1$, $j=r+1,\ r+2,\ \cdots,\ k$, 则根据情况(b)以及$\phi(n)$与$J(n)$的定义可以得到$\phi^2(n)=nJ(n)$当且仅当

$$\phi^2(p_1p_2\cdots p_r)=p_1p_2\cdots p_rJ(p_1p_2\cdots p_r)$$

或者

$$(p_1-1)^2(p_2-1)^2\cdots(p_r-1)^2 = p_1p_2\cdots p_r(p_1-2)(p_2-2)\cdots(p_r-2).$$

显然, p_r不能整除$(p_1-1)^2(p_2-1)^2\cdots(p_r-1)^2$. 于是在这种情况下方程$\phi^2(n) = nJ(n)$无解.

综合以上三种情形我们立刻可以得到方程$\phi^2(n) = nJ(n)$ 的所有解的集合是1与$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}(\ \alpha_i > 1)$. 即就是, 集合$A$是由所有完全平方数与1组成.

现在我们如下定义算术函数$a(n)$:

$$a(n) = \begin{cases} 1, & \text{如果} \quad n \in A, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

对任意实数$s > 0$, 显然有

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n\in A}}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

及当$s > 1$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 收敛. 因此对$s \geq 2$, 根据Euler乘积公式, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} &= \prod_p \left(1 + \frac{a(p^2)}{p^{2s}} + \frac{a(p^3)}{p^{3s}} + \cdots\right) \\
&= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots\right) \\
&= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{2s}(1-\frac{1}{p^s})}\right) \\
&= \prod_p \frac{p^{2s}-p^s+1}{p^{2s}-p^s} \\
&= \prod_p \frac{p^{3s}+1}{p^s(p^{2s}-1)} \\
&= \prod_p \frac{p^{6s}-1}{p^s(p^{2s}-1)(p^{3s}-1)} \\
&= \prod_p \frac{1-\frac{1}{p^{6s}}}{(1-\frac{1}{p^{2s}})(1-\frac{1}{p^{3s}})} \\
&= \frac{\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)},
\end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$是Riemann zeta-函数, $\prod\limits_p$表示对所有素数乘积.

这样就完成了定理4.2.1的证明.

在定理4.2.1中取$s = 1$及2, 并且注意到$\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$, $\zeta(6) = \pi^6/945$, $\zeta(12) = 691\pi^{12}/638512875$, 我们立刻可以推出下面的恒等式:

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{1}{n} = \frac{315}{2\pi^4}\zeta(3) \quad 和 \quad \sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{15015}{1382}\frac{1}{\pi^2}.$$

4.3 对称序列及其性质

对任意的正整数n, 我们定义对称序列$\{a_n\}$如下: $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 121$, $a_4 = 1221$, $a_5 = 12321$, $a_6 = 123321$, $\cdots$, $a_{2k-1} = 123\cdots(k-1)k(k-1)\cdots 321$, $a_{2k} = 123\cdots(k-1)kk(k-1)\cdots 321$, $\cdots$. 在文献[1]的第17个问题里, F.Smarandache 教授建议我们研究序列$\{a_n\}$的性质. 关于这些问题, W.P.Zhang (参阅文献[24]) 给出了一个有趣的渐近公式. 本节中, 我们定义$A(a_n)$ 如下: $A(a_1) = 1$, $A(a_2) = 2$, $A(a_3) = 4, \cdots$, $A(a_{2k-1}) = 1+2+\cdots+k-1+k+k-1+\cdots+1$, $A(a_{2k}) = (1+\cdots+k-1+k+k+k-1+\cdots+1)$, $\cdots$. 我们将利用初等方法讨论序列$A(a_n)$的性质, 并给出一个关于$A(a_n)$ 的一个有趣的恒等式.

定理4.3.1 设$A(a_n)$的定义如上, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{A(a_n)} = \frac{\pi^2}{6} + 1.$$

证明: 根据$A(a_n)$的定义我们有

$$A(a_k) = A(a_{k-1}) + \left[\frac{k-1}{2}\right] + 1.$$

则由上式可得

$$\sum_{k=1}^{n}A(a_k) = \sum_{k=1}^{n-1}A(a_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k-1}{2}\right] + n. \tag{4-1}$$

根据(4-1), 我们有

$$A(a_n) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k-1}{2}\right] + n = \left[\frac{(n-1)^2}{4}\right] + n. \tag{4-2}$$

下面我们将定理中的和式分为两部分来讨论. 当$n = 2k+1$时, 则有

$$A(a_n) = \left[\frac{[(2k+1)-1]^2}{4}\right] + 2k + 1 = (k+1)^2. \tag{4-3}$$

当$n=2k$时, 则有

$$A(a_n)=\left[\frac{(2k-1)^2}{4}\right]+2k=k^2+k. \tag{4-4}$$

综合(4-2), (4-3), (4-4)并注意到$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{A(a_n)} &= \frac{1}{A(a_1)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\\ &= \zeta(2)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\ &= \frac{\pi^2}{6}+1.\end{aligned}$$

于是完成了定理4.3.1的证明.

4.4 一组Dirichlet级数及其恒等式

对任意的正整数k, 我们定义一个算术函数$\delta_k(n)$如下:

$$\delta_k(n)=\begin{cases}\max\{d\in N \ \ | \ \ d|n,(d,k)=1\}, & \text{如果} \quad n\neq 0,\\ 0, & \text{如果} \quad n=0.\end{cases}$$

令$\mathcal{A}$表示使方程$\delta_k(n)=b_m(n)$成立的所有正整数n的集合, 其中$b_m(n)$ 表示n 的m次补数(参阅定义2.1.1). 即$\mathcal{A}=\{\mathrm{n}:n\in N,\delta_k(n)=b_m(n)\}$. 本小节利用初等方法讨论了包含集合$\mathcal{A}$的一组Dirichlet 级数的收敛性质如下：

定理4.4.1 设m为一个正偶数, 对任意的正实数$s>1$和正整数k, 则有恒等式

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\in\mathcal{A}}}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{\zeta\left(\frac{m}{2}s\right)}{\zeta(ms)}\prod_{p|k}\frac{p^{\frac{3}{2}ms}}{(p^{ms}-1)\left(p^{\frac{1}{2}ms}-1\right)},$$

其中$\zeta(k)$是*Riemann zeta*-函数, $\prod\limits_{p}$表示对所有的素因子求积.

证明: 对任意的正实数$s>0$, 显然当$s>1$时

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\in\mathcal{A}}}^{\infty}\frac{1}{n^s}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},$$

和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$均收敛, 因此当$s>1$时$\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\in\mathcal{A}}}^{\infty}\frac{1}{n^s}$也收敛. 下面我们来找出集合$\mathcal{A}$. 设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 表示n的标准分解式. 由$\delta_k(n)$ 和$b_m(n)$的定义我们可

知$\delta_k(n)$和$b_m(n)$都是可乘函数. 所以为了找出集合$\mathcal{A}$, 我们只需讨论$n = p^\alpha$的情形即可. 若$n = p^\alpha$ 且$(p,k) = 1$, 我们有$\delta_k(p^\alpha) = p^\alpha$; 当$1 \leq \alpha \leq m$, $b_m(p^\alpha) = p^{m-\alpha}$; 当$\alpha > m$且$\alpha \neq m$, $b_m(p^\alpha) = p^{m+m[\frac{\alpha}{m}]-\alpha}$; 当$\alpha = rm$, $b_m(p^\alpha) = 1$, 其中的r为任意的正整数, $[x]$ 表示$\leq x$的最大正整数. 所以当且仅当$\alpha = \frac{m}{2}$有$\delta_k(p^\alpha) = b_m(p^\alpha)$.

若$n = p^\alpha$且$(p,k) \neq 1$, 则$\delta_k(p^\alpha) = 1$, 所以当且仅当$n = p^{rm}$, $r = 0, 1, 2, \cdots$时方程$\delta_k(p^\alpha) = b_m(p^\alpha)$有解. 根据Euler 公式和$\mathcal{A}$的定义, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n=1\\ n\in\mathcal{A}}}^{\infty}\frac{1}{n^s} &= \prod_{p\dagger k}\left(1+\frac{1}{p^{\frac{m}{2}s}}\right)\prod_{p|k}\left(1+\frac{1}{p^{ms}}+\frac{1}{p^{2ms}}+\frac{1}{p^{3ms}}+\cdots\right)\\
&= \prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^{\frac{m}{2}s}}\right)\prod_{p|k}\frac{1}{1-\frac{1}{p^{ms}}}\prod_{p|k}\left(1+\frac{1}{p^{\frac{m}{2}s}}\right)^{-1}\\
&= \frac{\zeta\left(\frac{m}{2}s\right)}{\zeta(ms)}\prod_{p|k}\frac{p^{\frac{3}{2}ms}}{(p^{ms}-1)\left(p^{\frac{1}{2}ms}+1\right)},
\end{aligned}$$

其中$\zeta(k)$是Riemann zeta-函数, $\prod\limits_{p}$表示对所有的素因子求积.

于是完成了定理4.4.1的证明.

由定理4.4.1我们立刻可推出以下几个推论:

推论4.4.1 设$\mathcal{B} = \{n{:}n \in N, \delta_k(n) = b_2(n)\}$, 则有

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\in\mathcal{B}}}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{15}{\pi^2}\prod_{p|k}\frac{p^6}{(p^4-1)(p^2-1)}.$$

推论4.4.2 设$\mathcal{C} = \{n{:}n \in N, \delta_k(n) = b_3(n)\}$, 则有

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\in\mathcal{C}}}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{\substack{n=1\\ n\in\mathcal{B}}}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{105}{\pi^4}\prod_{p|k}\frac{p^{12}}{(p^8-1)(p^4-1)}.$$

推论4.4.3 设$\mathcal{C} = \{n{:}n \in N, \delta_k(n) = b_4(n)\}$, 则有

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\in\mathcal{C}}}^{\infty}\frac{1}{n^3} = \frac{675675}{691}\frac{1}{\pi^6}\prod_{p|k}\frac{p^{18}}{(p^{12}-1)(p^6-1)}.$$

4.5 三角形数的性质

对任意的正整数m, 显然$m(m+1)/2$是一正整数, 由于这些数与几何有密切的

联系, 所以我们将其称为三角形数. 对任意的正整数n, 我们定义算术函数$c(n)$如下:

$$c(n)=\max\left\{m(m+1)/2\ :\ m(m+1)/2\le n,\ m\in N\right\}.$$

即$c(n)$是$\le n$的最大的三角形数. 由$c(n)$的定义我们容易推出$c(1)=1$, $c(2)=1$, $c(3)=3$, $c(4)=3$, $c(5)=3$, $c(6)=6$, $c(7)=6$, $c(8)=6$, $c(9)=6$, $c(10)=10$, $\cdots\cdots$. 本节中主要介绍了有关序列$c(n)$的一个新的Dirichlet 级数$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c^s(n)}$, 利用初等方法研究了$f(s)$的收敛性质, 即

定理4.5.1 设s为任意的正实数, 则当且仅当$s>1$时*Dirichlet* 级数$f(s)$是收敛的. 特别的当$s=2$, 3及4, 我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c^2(n)}=\frac{2\pi^2}{3}-4;$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c^3(n)}=8\zeta(3)-4\pi^2+32;$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c^4(n)}=\frac{\pi^4}{5}-48\zeta(3)+\frac{160}{3}\pi^2-384;$$
$$6f(3)+f(4)=\frac{\pi^4}{5}+\frac{88}{3}\pi^2-192.$$

其中$\zeta(k)$是*Riemann zeta*-函数.

证明: 显然, 若$\frac{m(m+1)}{2}\le n<\frac{(m+1)(m+2)}{2}$, 则$c(n)=\frac{m(m+1)}{2}$. 所以在序列$c(n)$中同样的数$\frac{m(m+1)}{2}$重复$\frac{(m+1)(m+2)}{2}-\frac{m(m+1)}{2}=m+1$ 次. 因此, 我们有

$$\begin{aligned}f(s)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c^s(n)}\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m+1}{(\frac{m(m+1)}{2})^s}\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^s}{m^s(m+1)^{s-1}}.\end{aligned}$$

显然当$s>1$时$f(s)$收敛, 当$s\le 1$时$f(s)$发散. 特别的当$s=2$我们有

$$\begin{aligned}f(2)&=4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2(m+1)}\\&=4\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}\right)\\&=4\zeta(2)-4.\end{aligned}$$

应用同样的方法我们可得

$$f(3) = 8\zeta(3) - 24\zeta(2) + 32;$$
$$f(4) = 16\zeta(4) - 48\zeta(3) + 320\zeta(2) - 384.$$

由恒等式$\zeta(2) = \pi^2/6$ 和$\zeta(4) = \pi^4/90$可推出定理4.5.1的结论(参阅文献[2]).

于是完成了定理4.5.1的证明.

注: 事实上, 对任意的正整数$s \geq 2$, 应用这种方法我们可以用Riemann zeta-函数来表示$f(s)$.

4.6 下阶乘部分序列和上阶乘部分序列

对任意的正整数n, 用$a(n)$来表示下阶乘部分, 其定义为: 小于或等于n的最大阶乘数. 即为序列: $1, 2, 2, 2,\ 2, 6, 6, 6,\ 6, 6, 6, 6,\ 6, 6, 6, 6, 6, 6,\ 6, 6, 6, 6, 6,\ 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, \cdots$. 另一方面, 用$b(n)$来表示上阶乘部分, 其定义为: 大于或等于$n$的最小阶乘数. 即为序列: $1, 2, 6,\ 6, 6, 6, 24,\ 24, 24,\ 24, 24, 24,\ 24, 24, 24,\ 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24,\ 24, 24, 120,\ 120, 120, \cdots$. 在文献[1], Smarandache教授在其第42个问题里建议我们研究这两个序列的性质. 本小节中, 我们介绍了包含$a(n)$与$b(n)$的两个无穷级数:

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\alpha}(n)}, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{\alpha}(n)},$$

并给出这些级数收敛的充分条件如下：

定理4.6.1 *设α为任意的正实数, 则当$\alpha > 1$时, 无穷级数I和S皆收敛, 当$\alpha \leq 1$ 时它们皆发散.*

证明: 设$a(n) = m!$, 当$m! \leq n < (m+1)!$时, 我们很容易得出$a(n) = m!$, 所以在序列$\{a(n)\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 中同样的$m!$将被重复$(m+1)! - m!$次. 因此, 我们有

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\alpha}(n)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m+1)! - m!}{(m!)^{\alpha}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \cdot m!}{(m!)^{\alpha}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(m!)^{\alpha-1}}.$$

显然, 当$\alpha > 1$时, 无穷级数I收敛; 当$\alpha \leq 1$时, 无穷级数I发散. 使用同样的方法, 我们也可以得到S 收敛性的充分条件. 特别地, 当$\alpha = 2$ 时, 根据数学分析上的知识(参阅文献[25]), 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2(n)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = e.$$

于是完成了定理4.6.1的证明.

特别地, 当$\alpha = 2$ 时, 我们有下面的推论.

推论4.6.1 *我们有恒等式*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2(n)} = e.$$

4.7 Smarandache对偶函数

对任意正整数n, 著名的Smarandache 函数$S(n)$定义为使$n|m!$的最小的正整数m. 即

$$S(n) = \min\{m : n \mid m!\}.$$

Smarandache教授在文献[1]中介绍了这个函数$S(n)$并要求我们研究它的性质. 设$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$为$n$的标准因子分解式, 容易推出$S(n) = \max\{S(p_1^{\alpha_1}), S(p_2^{\alpha_2}), \cdots, S(p_k^{\alpha_k})\}$.所以我们可以通过研究$S(p_i^{\alpha_i})$的性质来研究$S(n)$. 关于函数$S(n)$的性质,引起了许多学者的研究兴趣, 参阅文献[26], [27]和[28]. 例如在文献[26]中Farris Mark 和Mitchell Patrick 研究了函数$S(n)$的边界问题, 并给出了$S(p^\alpha)$的上界和下界, 即

$$(p-1)\alpha + 1 \le S(p^\alpha) \le (p-1)[\alpha + 1 + \log_p \alpha] + 1.$$

在文献[27]中Wang Yongxing 研究了$\sum\limits_{n\le x} S(n)$的均值性质, 并利用初等方法得出一个渐近公式, 即证明了

$$\sum_{n\le x} S(n) = \frac{\pi^2}{12}\frac{x^2}{\ln x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

类似我们介绍另一个与Smarandache函数相关的函数, 称其为Smarandache 对偶函数$S^*(n)$, 它表示使$n|m!$的最小的正整数m, 其中的n为任意的正整数. 即

$$S^*(n) = \max\{m : m! \mid n\}.$$

关于这个问题, 在文献[29]中J.Sandor提出猜想

$$S^*((2k-1)!(2k+1)!) = q - 1,$$

其中k为一正整数，q是$2k+1$之后的第一个素数. Le Maohua 在文献[30]中给出这个猜想的证明.

本节利用初等方法讨论了级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{S^*(n)}{n^\alpha}$的收敛性质, 并给出一个有趣的恒等式. 即就是,

定理4.7.1 对任意的实数$\alpha \le 1$, 无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^*(n)}{n^\alpha}$$

发散, 当$\alpha > 1$时这个级数收敛, 且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(n)}{n^\alpha} = \zeta(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^\alpha},$$

其中$\zeta(s)$是Riemann zeta-函数.

证明: 对任意的实数$\alpha \le 1$,注意到$S^*(n) \ge 1$ 和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

发散, 所以当$\alpha \le 1$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(n)}{n^\alpha}$也发散.

对任意的正整数$n \ge 1$, 一定存在一个正整数m 使得

$$n = m! \cdot l,$$

成立, 其中$l \not\equiv 0 (\bmod\ m+1)$. 所以对任意$\alpha > 1$, 由$S^*(n)$的定义可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(n)}{n^\alpha} &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m+1 \dagger l}}^{\infty} \frac{m}{(m!)^\alpha \cdot l^\alpha} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{l=1 \\ m+1 \dagger l}}^{\infty} \frac{m}{(m!)^\alpha \cdot l^\alpha} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(m!)^\alpha} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^\alpha} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^\alpha \cdot l^\alpha} \right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(m!)^\alpha} \zeta(\alpha) \left(1 - \frac{1}{(m+1)^\alpha} \right) \\
&= \zeta(\alpha) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(m!)^\alpha} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{((m+1)!)^\alpha} \right) \\
&= \zeta(\alpha) \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{((m+1)!)^\alpha} \right) \\
&= \zeta(\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m!)^\alpha}.
\end{aligned}$$

于是完成了定理4.7.1的证明.

在定理4.7.1中取$\alpha = 2$ 和$\alpha = 4$我们立刻可得如下推论:

推论4.7.1 对于*Smarandache*对偶函数, 有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(n)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(n)}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^4}.$$

4.8 广义的可构造集合

定义广义的可构造集合S 为: 仅由数字$d_1, d_2, \cdots, d_m$ 组成, 且所有的d_i ($1 \le m \le 9$) 互不相同. 也就是说,

(1) $d_1, d_2, \cdots, d_m$ 皆属于S.

(2) 若a, b 属于S，则$\overline{ab}$ 也属于S.

(3) 仅运用规则(1) 和(2) 有限次所得的元素属于S.

例如, 可构造集合(对于数字1, 2)为: $1, 2, 11, 12, 21, 22, 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222, 1111, 1112, 1121, \cdots$. 可构造集合(对于数字1, 2, 3) 为: $1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33, 111, 112, 113, 121, 122, 123, 211, 212, 213, 221, 222, 223, \cdots$. 在文献[1]的第6, 7 和8 个问题里, Smarandache 教授建议我们研究这些序列的性质. 为了叙述方便, 我们用$\{a_n\}$ 来表示这个序列. 这里我们利用初等方法讨论了级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n^{\alpha}}$ 的收敛性, 其中的α 为任意正数.

定理4.8.1 *设α 为任意的正实数, 当$\alpha > \log m$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n^{\alpha}}$收敛, 而当$\alpha \le \log m$时该级数发散.*

证明: 注意到, 对于$k = 1, 2, 3, \cdots$, 包含k 个数字的广义可构造集合序列里有m^k 个数, 所以我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^{\alpha}} &< \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m^k}{(10^{k-1})^{\alpha}} \\ &= m \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m^{k-1}}{10^{(k-1)\alpha}} \\ &= \frac{m}{1 - \frac{m}{10^{\alpha}}} \\ &= \frac{m \cdot 10^{\alpha}}{10^{\alpha} - m}, \end{aligned}$$

其中我们利用了级数$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m^{k-1}}{10^{(k-1)\alpha}}$ 当且仅当公比$\frac{m}{10^{\alpha}} < 1$, 也即$\alpha > \log m$ 时是收敛的这一事实, 于是完成了定理4.8.1的证明.

特别地, 设

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \cdots,$$

及

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \frac{1}{33} + \cdots.$$

于是:

定理4.8.2 级数S_2和S_3都收敛, 且有估计

$$\frac{10264}{5775} < S_2 < \frac{8627}{4620} \qquad 及 \qquad \frac{314568337}{155719200} < S_3 < \frac{10532147}{4449120}$$

成立.

证明: 一方面

$$\begin{aligned} S_2 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\cdots \\ &< 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{2^k}{10^{k-1}} \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{2^3}{10^2}\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{2^{k-3}}{10^{k-2}} \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{2}{25}\times\frac{1}{1-\frac{1}{5}} \\ &= \frac{8627}{4620}. \end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} S_2 &> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{2^k}{10^k} \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{2^3}{10^3}\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{2^{k-3}}{10^{k-3}} \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{125}\times\frac{1}{1-\frac{1}{5}} \\ &= \frac{10264}{5775}. \end{aligned}$$

于是完成了定理4.8.2的第一部分证明.

类似地, 我们可以证明定理4.8.2的第二部分, 这样就完成了定理4.8.2 的证明.

第五章 特殊方程求解问题

方程的整数解是数论的一个重要课题，也是一个非常复杂和非常吸引人的课题，世界上许多伟大的数学家都在这一领域作出过出色的工作，至今仍旧是现代数论和现代代数几何的推动力和源泉. 为了研究一些方程的整数解，人们创造了了许多强有力的方法和工具，但是仍有许多问题没有解决. 这里，我们仅选择了一些与Smarandache问题有关的特殊方程的整数解问题进行讨论，来展示对于特殊方程整数解研究过程中的一般方法和技巧性.

5.1 Smarandache m 次剩余

对任意正整数n, 令n的标准因子分解式为$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$. Smarandache m次剩余函数$a_m(n)$被定义如下:

$$a_m(n) = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}, \quad \beta_i = \min\{m-1, \alpha_i\}, i = 1, 2.\cdots, k.$$

在文献[1]中的第65问题, F.Smarandache 教授要求我们研究这个函数的性质. 设$\phi(n)$为Euler函数, 即就是, $\phi(n)$所有不超过n且与n互素的正整数的个数. 显然, 函数$\phi(n)$与$a_m(n)$均是可乘函数. 这一小节中, 我们将利用初等方法来讨论包含这两个函数的方程的求解问题, 并给出了方程的所有解.

定理5.1.1 设m为任意给定整数且$m \geq 2$, 则方程$\phi(n) = a_m(n)$有$m+1$个解, 相应的解如下

$$n = 1, 2^m, 2^\alpha 3^m, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, m-1.$$

证明: 设n 的标准因子分解式为$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, 则由$\phi(n)$ 及$a_m(n)$ 的定义我们有

$$a_m(n) = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}, \quad \beta_i = \min\{m-1, \alpha_i\}, i = 1, 2.\cdots, k \tag{5-1}$$

并且

$$\phi(n) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1). \tag{5-2}$$

显然, $n = 1$ 是方程$\phi(n) = a_m(n)$ 的一个解. 如果$n > 1$, 那我们将分四种情况对这一问题进行讨论:

(i) 如果存在$\alpha_i > m$, 那么我们有$\alpha_i - 1 \geq m$, $\max\limits_{1\leq j\leq k}\{\beta_j\} \leq m-1$. 结合(5-1) 及(5-2), 我们可知$\phi(n) \neq a_m(n)$. 事实上, 在这种情况下没有任何解满足方程$\phi(n) = a_m(n)$;

(ii) 如果$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = m$, 则

$$a_m(n) = p_1^{m-1}p_2^{m-1}\cdots p_k^{m-1}$$

并且

$$\phi(n) = p_1^{m-1}(p_1-1)p_2^{m-1}(p_2-1)\cdots p_k^{m-1}(p_k-1).$$

显然, 仅有$n = 2^m$ 是满足条件的方程的解;

(iii) 如果$\max\limits_{1\le i\le k}\{\alpha_i\} < m$, 则由(5-1) 及(5-2), 并注意到$\beta_k = \alpha_k > \alpha_k - 1$, 我们可知对所有满足条件的$n$, $\phi(n) \neq a_m(n)$;

(iv) 如果存在i, j 满足$\alpha_i = m$ 且$\alpha_j < m$, 那么根据(5-1), (5-2) 以及方程$\phi(n) = a_m(n)$, 可以得到$p_1 = 2$. 否则, 就会得到$\phi(n)$ 是偶数, 但$a_m(n)$ 却为奇数的矛盾. 注意到如果$\alpha_k < m$, 则$\phi(n) \neq a_m(n)$, 于是我们有$\alpha_k = m$ 及

$$\phi(n) = 2^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{m-1}(p_k-1) = a_m(2^{\alpha_1})a_m(p_2^{\alpha_2})\cdots a_m(p_k^m) = a_m(n).$$

如果$\alpha_1 = m$, 那么$n = 2^m$ 就是第(ii) 种情况. 因此, $\alpha_1 < m$. 现在根据方程, 我们有

$$p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{m-1}(p_k-1) = 2a_m(p_2^{\alpha_2})\cdots a_m(p_k^m). \tag{5-3}$$

注意到当$i > 1$ 时$2|(p_i-1)$, 由(5-3) 我们可以推出在(5-3) 式左边部分具有$p_i - 1$ 形式的项仅有一项. 即就是,

$$n = 2^\alpha p^m.$$

利用

$$\phi(2^\alpha p^m) = a_m(2^\alpha p^m) \Longleftrightarrow p^{m-1}(p-1) = 2p^{m-1},$$

可以得到$n = 2^\alpha 3^m, 1 \le \alpha < m$.. 于是, 在这种情况下$n = 2^\alpha 3^m, \quad (1 \le \alpha < m)$ 是方程$\phi(n) = a_m(n)$ 的所有解.

综合以上四种情况的讨论我们立刻可以得到方程$\phi(n) = a_m(n)$ 有$m+1$ 个解, 并且相应的解为

$$n = 1, 2^m, 2^\alpha 3^m, \quad \alpha = 1, 2.\cdots, m-1.$$

这样就完成了定理5.1.1 的证明.

5.2 Smarandache方程及其整数解

设Q 表示所有的有理数集合, $a \in Q\setminus\{-1, 0, 1\}$. 在书[1] 中的第50 个问题, F.Smarandache 教授要求我们去求解方程

$$x \cdot a^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \cdot a^x = 2a. \tag{5-4}$$

对这一问题的讨论可以帮助我们去理解一些新的不定方程, 所以研究它是十分有意义的. 本节中, 我们利用初等方法及解析方法对方程(5-4)进行讨论, 并证明了以下结论:

定理5.2.1 对所有$a \in Q\setminus\{-1, 0, 1\}$, 方程

$$x \cdot a^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \cdot a^x = 2a$$

有且仅有一个整数解$x=1$.

证明: 这里我们将利用初等方法以及数学分析中的Rolle 定理完成定理5.2.1的证明. 首先, 我们将证明在$a>1$ 的情况下定理成立. 事实上, 在这种情况下, 设x 是方程(5-4) 的一个整数解, 则我们必有$x>0$. 于是, 利用不等式$|u|+|v|\geq 2\sqrt{|u|\cdot|v|}$ 可以推出

$$x\cdot a^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\cdot a^{x}\geq 2\cdot\sqrt{x\cdot a^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot a^{x}}=2\cdot a^{\frac{x+\frac{1}{x}}{2}}\geq 2\cdot a,$$

且当且仅当$x=1$ 时方程成立. 这样就证明了对于$a>1$, 方程(5-4) 有且仅有一个整数解$x=1$.

现在我们考虑$0<a<1$. 设x_0 是方程(5-4) 的一个任意整数解, 则$x_0>0$. 为了证明$x_0=1$, 我们假定$x_0\neq 1$, 并且设$0<x_0<1$ (证明$x_0>1$ 的情况与$0<x_0<1$ 情况相同), 则有$\frac{1}{x_0}>1$. 我们如下定义函数$f(x)$:

$$f(x)=x\cdot a^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\cdot a^{x}-2a$$

显然, 函数$f(x)$ 在闭区间$\left[x_0,\frac{1}{x_0}\right]$ 上连续, 在开区间$\left(x_0,\frac{1}{x_0}\right)$ 内可导, 并且$f(x_0)=f(\frac{1}{x_0})=f(1)=0$. 于是, 由数学分析中的Rolle 定理可知$f'(x)$ 在开区间$\left(x_0,\frac{1}{x_0}\right)$ 内必有两个零点, 而且在同一开区间内$f''(x)$ 必有一个零点. 但是, 由函数$f(x)$ 的定义我们可以推出

$$f'(x)=a^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}\cdot a^{\frac{1}{x}}\cdot\ln a-\frac{1}{x^2}\cdot a^{x}+\frac{1}{x}\cdot a^{x}\cdot\ln a$$

及

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{1}{x^3}\cdot a^{\frac{1}{x}}\cdot\ln^2 a+\frac{2}{x^3}\cdot a^{x}-\frac{1}{x^2}\cdot a^{x}\cdot\ln a-\frac{1}{x^2}\cdot a^{x}\cdot\ln a+\frac{1}{x}\cdot a^{x}\cdot\ln^2 a\\&=\frac{1}{x^3}\cdot a^{\frac{1}{x}}\cdot\ln^2 a+\frac{2}{x^3}\cdot a^{x}+\frac{2}{x^2}\cdot a^{x}\cdot\ln\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\cdot a^{x}\cdot\ln^2 a\\&>0,\quad x\in\left(x_0,\frac{1}{x_0}\right),\end{aligned}$$

其中我们用到$0<a<1$ 与$\ln\frac{1}{a}>0$. 这与$f''(x)$ 在开区间$\left(x_0,\frac{1}{x_0}\right)$ 内必有一个零点相矛盾. 这样就证明了当$0<a<1$ 时定理成立.

如果$a<0$ 且$a\neq -1$, 方程(5-4) 有一个整数解x, 因为负数没有实的平方根, 所以$|x|$ 必为一个奇数. 于是, 在这种情况下方程(5-4) 可以化为:

$$\begin{aligned}2|a|&=-2a=-x\cdot a^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}\cdot a^{x}=-x\cdot(-1)^{\frac{1}{x}}\cdot|a|^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}\cdot(-1)^{x}\cdot|a|^{x}\\&=x\cdot|a|^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\cdot|a|^{x}.\end{aligned}$$

则由前面的推导结论可知, 在这种情况下定理仍然成立.这样就完成了定理的证明.

注: 事实上, 由定理的证明过程我们很容易发现我们可以证明更一般的结论: 设R表示所有的实数之集. 对任意$a \in R\backslash\{-1,0,1\}$, 方程

$$x \cdot a^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \cdot a^{x} = 2a$$

有且仅有一个整数解$x=1$; 当$a>0$ 时, 它有且仅有一个实数解$x=1$.

5.3 关于函数$\varphi(n)$及$\delta_k(n)$

对给定正整数k 及任意正整数n, 我们如下定义一种新的数论函数:

$$\delta_k(n) = \max\{d \mid d \mid n, (d,k)=1\}$$

如果$n \geq 1$, 则Euler 函数$\varphi(n)$ 表示所有不超过n 且与n 互素的正整数的个数, 因此

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n}{}' 1,$$

其中和式$\sum\limits_{k=1}^{n}{}'$ 表示对所有小于等于n 且与n 互素的正整数k 求和.

本节中, 我们将研究函数$\varphi(n)$ 整除函数$\delta_k(n)$ 的性质, 并求出所有满足$\varphi(n) \mid \delta_k(n)$ 的整数n. 首先有:

引理5.3.1 对$n \geq 1$, 我们有

$$\varphi(n) = n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

证明: (参阅文献[4] 中定理2.4).

定理5.3.1 $\varphi(n) \mid \delta_k(n)$ 当且仅当$n = 2^{\alpha}3^{\beta}$, 其中$\alpha>0, \beta \geq 0, \alpha, \beta \in N$.

证明: 我们将分以下两种情况进行讨论:

(I) 当$(n,k)=1$ 时, 则$\delta_k(n)=n$. 设n 的标准因子分解式为$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$. 由引理5.3.1, 可记

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_s^{\alpha_s-1}(p_s-1),$$

如果$\varphi(n) \mid \delta_k(n)$, 那么

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_s^{\alpha_s-1}(p_s-1) \mid n,$$

即就是

$$(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1) \mid p_1p_2\cdots p_s,$$

根据引理5.3.1, 我们可知

i) $p_1 = 2$, 否则, $(p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_s - 1)$ 是偶数但$p_1 p_2 \cdots p_s$ 是奇数并且

ii) $s \leq 2$, 因为$2|(p_i - 1) \quad (i = 2, 3, \cdots, s)$ 但是$p_2 p_3 \cdots p_s$ 不能被2 整除.

若$s = 1$, 则$n = 2^\alpha, \alpha \geq 1$.

若$s = 2$, 则$n = 2^\alpha 3^\beta, \alpha \geq 1, \beta > 1$.

因此, 我们可以得到当$(n, k) = 1$ 时, $n = 2^\alpha 3^\beta, \alpha \geq 1, \beta \geq 0$ 满足$\varphi(n) \mid \delta_k(n)$.

(II) 当$(n, k) \neq 1$ 时, 令$n = n_1 \cdot n_2$, 其中$(n_1, k) = 1$ 且$(n_1, n_2) = 1$, 那么

$$\delta_k(n) = n_1,$$

及

$$\varphi(n) = \varphi(n_1)\varphi(n_2),$$

如果$\varphi(n) \mid \delta_k(n)$, 那么

$$\varphi(n_1)\varphi(n_2) \mid n_1,$$

即就是

$$\varphi(n_1) \mid n_1 \tag{5-5}$$

$$\varphi(n_2) \mid n_1 \tag{5-6}$$

利用(5-5), 我们可得

$$n_1 = 2^{\alpha_1} 3^{\beta_1}, \tag{5-7}$$

其中$\alpha_1 \geq 1, \beta_1 \geq 0, \alpha_1, \beta_1 \in N$.

综合(5-6) 及(5-7), 很容易推出

$$\varphi(n_2) \mid 2^{\alpha_1} 3^{\beta_1},$$

即就是

$$\varphi(n_2) = 1.$$

否则$(n_1, n_2) \neq 1$.

于是

$$n_2 = 1$$

总之, 无论n 与k 是否互素, 我们都可以得到$n = 2^\alpha 3^\beta, \alpha \geq 1, \beta \geq 0$ 满足$\varphi(n) \mid \delta_k(n)$.

于是就完成了定理5.3.1 的证明.

5.4 包含Euler函数和Smarandache函数的方程

对任意正整数n, 令$S(n)$表示Smarandache函数, 其定义为使$n|m!$的最小的正整数m. 如果$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$为$n$的标准因子分解式, 则由定义容易推出$S(n) =$

$\max\{S(p_i^{\alpha_i})\}$, 其中最大值指$i$取从1到$k$的所有值中的最大值.令$\phi(n)$表示Euler 函数, 也即$\phi(n)$表示所有不超过$n$且与$n$互素的正整数的个数, 显然$\phi(n)$是一可乘函数. Euler 函数$\phi(n)$ 表示所有不超过n 且与n 互素的正整数的个数. 本节将研究$\phi(n) = S(n^k)$(其中k为任意给定的正整数)方程的解的个数问题. 关于这个问题, 容易得到$n = 1$是该方程的解, 但我们并不知道这个方程是否有有限个解. 下面我们利用初等方法来解决这个问题, 对任意给定的正整数k给出了这个方程的全部解.

定理5.4.1 *方程$S(n) = \phi(n)$有四个解: $n = 1, 8, 9, 12$.*

证明: 设$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$为$n$的标准因子分解式, 令

$$S(n) = \max_{1 \le i \le k}\{S({p_i}^{\alpha_i})\} = S(p^{\alpha}).$$

由$S(n)$和$\phi(n)$定义可得

$$\begin{aligned} \phi(n) &= p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1) \\ &= \phi(p^{\alpha})\phi(n_1) = p^{\alpha-1}(p-1)\phi(n_1) = S(p^{\alpha}). \end{aligned}$$

显然$n = 1$是方程$S(n) = \phi(n)$的解.如果$n > 1$我们将分三种情况讨论如下:

(I) 如果$\alpha = 1$ 且$n = p$, 那么$S(n) = p \neq p - 1 = \phi(n)$. 也即是说, 不存在任何一个素数满足方程$S(n) = \phi(n)$. 如果$\alpha = 1$且$n = n_1 p$, 那么$S(n) = p \neq (p-1)\phi(n_1) = \phi(n_1 p)$. 所以该方程无解.

(II) 如果$\alpha = 2$, 那么有$S(p^2) = 2p$ 和$\phi(p^2 n_1) = p(p-1)\phi(n_1)$. 所以这时当且仅当

$$(p-1)\phi(n_1) = 2$$

才有$S(n) = \phi(n)$. 这可以分两种情况来讨论:$p - 1 = 1$, $\phi(n_1) = 2$; $p - 1 = 2$, $\phi(n_1) = 1$. 也即可得$p = 2$, $n_1 = 3$; $p = 3$, $n_1 = 1$. 这时方程$S(n) = \phi(n)$有两个解:$n = 12, 9$.

(III) 如果$\alpha = 3$, 显然有$S(2^3) = \phi(2^3) = 4$, 于是$n = 8$ 满足方程.

如果$\alpha \ge 3$ 且$p > 2$, 注意到

$$p^{\alpha-2} > 2^{\alpha-2} = (1+1)^{\alpha-2} = 1 + \alpha - 2 + \cdots + 1 > \alpha.$$

即有

$$p^{\alpha-1} > \alpha p \Rightarrow p^{\alpha-1}(p-1)\phi(n_1) > \alpha p,$$

但

$$S(p^{\alpha}) \le \alpha p.$$

所以这种情况该方程无解.

综合上面三种情况的讨论, 我们立刻可得方程$S(n) = \phi(n)$有四个解: $n = 1, 8, 9, 12$.

于是完成了定理5.4.1 的证明.

引理5.4.1 如果p为一素数, 那么$S(p^k) \le kp$. 如果$k < p$, 那么$S(p^k) = kp$, 其中k为任意给定的正整数.

证明: (参阅文献[31]).

定理5.4.2 方程$\phi(n) = S(n^2)$有三个解: $n = 1, 24, 50$.

证明: 令$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, 由$S(n)$和$\phi(n)$定义可得

$$S(n^2) = max\{S(p_i^{2\alpha_i})\} = S(p^{2\alpha}),$$

其中p为素数以及

$$\phi(n) = p^{\alpha-1}(p-1)\phi(n_1),$$

$$\phi(n) = p^{\alpha-1}(p-1)\phi(n_1),$$

其中$(n_1, p) = 1$. 也就是说n_1和p的最大公因子为1.

显然$n = 1$是方程$\phi(n) = S(n^2)$的解. 如果$n > 1$我们将分类讨论如下:

(i) 令$\alpha = 1$.

如果$p = 2$, 那么$S(2^2) = 4$, $\phi(n) = (2-1)\phi(n_1)$, 由$S(n^2) = S(2^2) = \phi(n) = \phi(n_1)$可得$\phi(n_1) = 4$, 所以$\phi(n_1) = 4$, 于是$n = 2^2 \times 5$. 但$S(2^4 \cdot 5^2) = 10 \ne \phi(2^2 \times 5)$, 因此这个方程无解.

如果$p \ge 3$, 由引理可得$S(p^2) = 2p$, $\phi(n) = (p-1)\phi(n_1)$, 注意到$p \dagger (p-1)\phi(n_1)$, 因此这个方程也无解.

(ii) 令$\alpha = 2$.

如果$p = 2$, 那么$S(2^4) = 6 = 2\phi(n_1)$, 无解.

如果$p = 3$, 那么$S(3^4) = 9 = 3 \times 2\phi(n_1)$, 无解.

如果$p = 5$, 那么$S(5^4) = 20 = 5 \times 4\phi(n_1)$, 所以$n_1 = 2$, 因此$n = 5^2 \times 2$是方程的解.

如果$p \ge 7$, 那么$S(p^4) = 4p = p(p-1)\phi(n_1)$, 注意到$p - 1 > 4$, 无解.

(iii) 令$\alpha = 3$.

如果$p = 2$, 那么$S(2^6) = 8 = 4\phi(n_1)$, 所以$n_1 = 3$, 因此$n = 2^3 \times 3$是方程的解.

如果$p = 3$, 那么$S(3^6) = 15 = 3^2 \times 2\phi(n_1)$, 无解.

如果$p = 5$, 那么$S(5^6) = 25 = 5^2 \times 4\phi(n_1)$, 无解.

如果$p = 7$, 那么$S(7^6) = 42 = 7^2 \times 6\phi(n_1)$, 无解.

如果$p > 7$, 那么$S(p^6) = 6p = p(p-1)\phi(n_1)$, 注意到$p - 1 > 6$, 无解.

(iv) 令$\alpha = 4$. 如果$p = 2$, 那么$S(2^8) = 10 = 8\phi(n_1)$, 无解.

如果$p \ge 3$, 由引理可得$S(p^{2\alpha}) < 2p\alpha$, 注意到$\phi(n) = p^{\alpha-1}(p-1)\phi(n_1)$和$p^{\alpha-1} > 2p\alpha$, 无解.

(v) 令$\alpha = 5$.

如果$p = 2$, 那么$S(2^{10}) = 12 = 2^4\phi(n_1)$, 无解.

如果$p \ge 3$, 由引理可得$S(p^{2\alpha}) < 2p\alpha$, 注意到$\phi(n) = p^{\alpha-1}(p-1)\phi(n_1)$和$p^{\alpha-1} > 2p\alpha$, 无解.

(vi) 令$\alpha \ge 6$.

如果$p \geq 2$, 由引理可得$S(p^{2\alpha}) < 2p\alpha$, 注意到$\phi(n) = p^{\alpha-1}(p-1)\phi(n_1)$和$p^{\alpha-1} > 2p\alpha$, 无解.

联合(i)到(vi), 我们立刻可得方程$\phi(n) = S(n^2)$有三个解: $n = 1, 24, 50$.

于是完成了定理5.4.2的证明.

类似地, 利用同样的方法我们可以得出:

定理5.4.3 方程$\phi(n) = S(n^3)$ 有三个解: $n = 1, 48, 98$.

定理5.4.4 方程$\phi(n) = S(n^4)$ 有一个解: $n = 1$.

注: 使用类似的方法, 我们也可以推出方程$\phi(n) = S(n^k)$ 有有限个解, 其中k为任意给定的正整数.

5.5 关于平方补数的一个方程

对任意正整数n, 设$b_2(n)$ 为平方补数(定义2.1.1). 这一小节中我们将利用解析方法讨论关于平方补数的方程

$$\sum_{k=1}^{n} b_2(k) = b_2(\frac{n(n+1)}{2})$$

的解的个数问题，并给出了这个特殊方程的全部解. 首先，我们需要下面几个引理.

引理5.5.1 设$x > 1$为一实数及$m > 1$是一正整数, 那么可得以下估计

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^m} > \zeta(m) - \frac{m}{(m-1)x^{m-1}}.$$

证明: 根据Euler求和公式容易推出

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^m} &= \int_1^x \frac{dt}{t^m} - m\int_1^x \frac{t-[t]}{t^{m+1}}dt + 1 - \frac{x-[x]}{x^m} \\
&= \frac{x^{1-m}}{1-m} - \frac{1}{1-m} + 1 - m\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{m+1}}dt + m\int_x^\infty \frac{t-[t]}{t^{m+1}}dt - \frac{x-[x]}{x^m} \\
&> \zeta(m) - \frac{m}{(m-1)x^{m-1}},
\end{aligned}$$

其中利用了恒等式(参阅文献[4])

$$\zeta(m) = 1 - \frac{1}{1-m} - m\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{m+1}}dt.$$

引理5.5.1 得证.

引理5.5.2 对任意的整数$n \geq 1$有以下估计

$$\sum_{k=1}^{n} b_2(k) > \frac{\zeta(4)}{2\zeta(2)}n^2 - \left(\frac{3}{2}\zeta(2) + \frac{1}{8}\right)n^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2}{3\zeta(2)}\right)n,$$

证明： 根据Euler求和公式以及$b_2(n)$的定义和Möbius 函数的性质可得

$$\begin{aligned}\sum_{k\le n} b_2(k) &= \sum_{m^2k\le n} k|\mu(k)| = \sum_{m^2d^2h\le n} d^2h\mu(d)\\ &= \sum_{m^2d^2\le n} d^2\mu(d) \sum_{h\le \frac{n}{m^2d^2}} h\\ &= \sum_{m^2d^2\le n} d^2\mu(d)\left(\frac{n^2}{2m^4d^4}+\frac{n}{2m^2d^2}-\frac{n}{m^2d^2}\{\frac{n}{m^2d^2}\}\right.\\ &\qquad \left.-\frac{1}{2}\left(\{\frac{n}{m^2d^2}\}-\{\frac{n}{m^2d^2}\}^2\right)\right)\\ &> \frac{n^2}{2}\sum_{m^2d^2\le n}\frac{\mu(d)}{m^4d^2} - n\sum_{m^2d^2\le n}\frac{1}{m^2} - \frac{1}{2}\sum_{m^2d^2\le n}\frac{d^2}{4}\\ &> \frac{n^2}{2}\sum_{m\le\sqrt{n}}\frac{1}{m^4}\sum_{d\le\frac{\sqrt{n}}{m}}\frac{\mu(d)}{d^2} - \zeta(2)n^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}n^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

和

$$\sum_{d\le\frac{\sqrt{n}}{m}}\frac{\mu(d)}{d^2} > \sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2} - \sum_{d>\frac{\sqrt{n}}{m}}\frac{1}{d^2} > \frac{1}{\zeta(2)} - \frac{m}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\zeta(2)} - \frac{m^2}{\sqrt{n}} \qquad .$$

再由引理5.5.1 有

$$\begin{aligned}\sum_{k\le n} b_2(k) &> \frac{n^2}{2}\sum_{m\le\sqrt{n}}\frac{1}{m^4}\left(\frac{1}{\zeta(2)}-\frac{m^2}{\sqrt{n}}\right) - \zeta(2)n^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}n^{\frac{3}{2}}\\ &= \frac{n^2}{2\zeta(2)}\sum_{m\le\sqrt{n}}\frac{1}{m^4} - \frac{n^{\frac{3}{2}}}{2}\sum_{m\le\sqrt{n}}\frac{1}{m^2} - \zeta(2)n^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}n^{\frac{3}{2}}\\ &> \frac{n^2}{2\zeta(2)}\left(\zeta(4)-\frac{4}{3n}\right) - \frac{3}{2}\zeta(2)n^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}n^{\frac{3}{2}}\\ &= \frac{\zeta(4)}{2\zeta(2)}n^2 - \left(\frac{3}{2}\zeta(2)+\frac{1}{8}\right)n^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2}{3\zeta(2)}\right)n.\end{aligned}$$

引理5.5.2得证.

在上面两个引理的基础上，我们给出下面的主要定理：

定理5.5.1 *方程*

$$\sum_{k=1}^{n} b_2(k) = b_2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

仅有三个解, 分别为$n = 1,\ 2,\ 3$.

证明： 我们分两种情况来讨论:

(i) 如果$\frac{n(n+1)}{2}$ 是一平方补数, 那么由$b_2(n)$的定义就有

$$b_2(\frac{n(n+1)}{2}) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

注意到$b_2(n) \leq n$立刻可得

$$\sum_{k=1}^{n} b_2(k) \leq b_2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right),$$

这个等式当且仅当左边得每一个$b_2(n)$均满足$b_2(n) = n$时才能成立. 这时容易推出方程有三个解: $n = 1, 2, 3$.

(ii) 如果$\frac{n(n+1)}{2}$ 无平方因子, 那么由$b_2(n)$的定义就有

$$b_2(\frac{n(n+1)}{2}) \leq \frac{n(n+1)}{8}.$$

注意到$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$再根据引理5.5.2可得

$$\sum_{k=1}^{n} b_2(k) > \frac{\zeta(4)}{2\zeta(2)} n^2 - \left(\frac{3}{2}\zeta(2) + \frac{1}{8}\right) n^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2}{3\zeta(2)}\right) n > \frac{3}{10} n^2 - 3n^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{9} n.$$

容易推出

$$\frac{3}{10} n^2 - 3n^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{9} n > \frac{n(n+1)}{8}, \quad 如果 \quad n > 361.$$

因此方程

$$\sum_{k=1}^{n} b_2(k) = a\left(\frac{n(n+1)}{2}\right), \quad 如果 \quad n > 361.$$

无解.

如果n得取值为从4 到361, 那么方程也无其它解.

于是完成了定理5.5.1 的证明.

下面给出计算程序如下:

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
//function
int get(int n)
{int i,m;
float g;
for(i=1;i≤ n;i++)
{g=sqrt(i*n);m=(int)g;
if(g-m==0)return i;
} }
```

```
main()
{int n=361 ;
int sum;
int i,j;
for(i=1;i≤ n;i++)
{sum=0;
for (j=0;j≤ i;j++) sum=sum+get(j);
if(sum==get(i*(i+1)/2))
printf"%d\n",i);}}
```

第六章 其它相关问题研究

在前面几章中我们主要介绍了Smarandache问题在数论函数, 特殊数列的分布, 级数及特殊方程解的问题, 所用方法主要为初等或解析的数论方法来研究. 但是Smarandache问题所涉及的研究领域非常广泛, 本章的主要目的在于通过Smarandache重空间, Smarandache几何, 广义Smarandache Palindromes数的密度, Smarandache n-结构及中智学等相关文章的阅读使读者初步了解Smarandache问题的广泛性, 并通过学习激发读者对Smarandache问题的研究兴趣.

Smarandche重空间及相关数学组合理论

毛林繁

(中国科学院数学与系统科学研究院，北京 100080)

摘要. 本文的主要目的，在于简要地介绍二十一世纪一种新兴的数学组合理论，即Smarandache重空间理论. 这种理论考虑不同性质的空间或不同结构类型的空间组合在一起应有的性质及数学规律，包括对经典代数结构中群、环、域、线性空间的组合，以及对经典几何，如欧氏几何、双曲几何、Riemann几何的组合等. 前国际物理界流行的弦与超弦/M-理论，其中采用的时空就是一种特殊的重空间. 当然，作为一种全新的物理时空，Smarandache重空间理论为二十一世纪理论物理研究提供了一种一般的空间组合理论.

关键词：*Smarandache*重空间，重群，重环，重度量空间，地图几何，*Smarandache*几何，伪度量空间几何，*Finsler*几何.

AMS(2000): 03C05, 05C15, 51D20,51H20, 51P05, 83C05,83E50

§1. 代数系统及其图解表示

首先考虑一个简单的问题：1 + 1 = ? 在自然数系中，我们知道1+1=2. 在2进制运算体系中，我们还知道1+1=10，这里的10实际上还是2. 依据“否定之否定等于肯定”的哲学思想，我们采用一种“反思维的、叛逆的”思想([6]) 来重新看待这个问题，重新分析$1 + 1 = 2$或$\neq 2$.

我们知道$1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 这样的数构成自然数系N. 在这个数系中，依据数数的规律，每个数称为前面紧邻着的数的后继数，即2的后继数为3，记为$2' = 3$. 同样，$3' = 4, 4' = 5, \cdots$. 这样我们就得到了

$$1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, 3 + 1 = 4, 4 + 1 = 5, \cdots;\quad 1 + 2 = 3, 1 + 3 = 4, 1 + 4 = 5, \cdots$$

这样一些运算等式. 在这种运算体系下，我们只能得到$1 + 1 = 2$的结论.

现在回顾一下运算的定义. 给定一个集合S，对$\forall x, y \in S$, 定义$x * y = z$，意思是S上存在一个2元结合映射$* : S \times S \to S$，使得$*(x, y) = z$.

采用图解的方式，我们可以用图把这种关系在平面上表示出来. 首先把S中的每个元用平面上的点表示，如果S 中有n个元，则在平面上就取n个不共线的点；两个点x,z之间连接一条有向线段，如果存在一个元y使得$x*y=z$,我们在这条线段上标上$*y$，

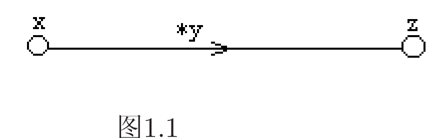


图1.1

注意这种对应是$1-1$的，记S对应的图为$G[S]$.

定义1.1 一个代数系统$(A;\circ)$称为单一的若存在一个映射$\varpi: A\to A$使得对$\forall a,b\in A$，只要$a\circ b\in A$，则存在一个唯一的元$c\in A$, $c\circ\varpi(b)\in A$，相应地称ϖ为单一映射.

我们很容易得到下面关于代数系统$(A;\circ)$与图$G[A]$的关系的一个结果.

定理1.1 设$(A;\circ)$为一个代数系统，则

(i) 若$(A;\circ)$上存在一个单一映射ϖ，则$G[A]$是一个Euler图. 反之，若$G[A]$是一个Euler图，则$(A;\circ)$是一个单一运算系统.

(ii) 若$(A;\circ)$是一个完全的代数运算系统，则$G[A]$中每个顶点的出度为$|A|$; 此外，如果$(A;\circ)$上消去律成立，则$G[A]$是一个完全的重2-图且每个顶点粘合一个环使得不同顶点之间的边为相对2-边，反之亦然.

§2. 代数Smarandache重空间

想要得到$1+1\neq 2$或$1+1=2$与$1+1\neq 2$同时成立的数学系统，我们需要进一步推广上面的思想. 一般地，我们定义一个Smarandache n-重空间如下.

定义2.1 一个n-重空间$\sum$，定义为n个集合$A_1,A_2,\cdots,A_n$的并

$$\sum=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

且每个集合A_i上均定义了一种运算$\circ_i$ 使得$(A_i\circ_i)$为一个代数体系，这里n为正整数，$1\leq i\leq n$.

举个简单的例子. 设n为一个正整数，$Z_1=(\{0,1,2,\cdots,n-1\},+)$为$(mod n)$加法群. $P=(0,1,2,\cdots,n-1)$为Z_n中的一个置换. 对任意整数$i, 0\leq i\leq n-1$，定义$Z_{i+1}=P^i(Z_1)$，使得若Z_1中$k+l=m$，则Z_{i+1}中有$P^i(k)+_i P^i(l)=P^i(m)$，此处$+_i$表示二元运算$+_i:(P^i(k),P^i(l))\to P^i(m)$. 则$\bigcup\limits_{i=1}^{n}Z_i$就是一个$n$重代数系统.

在重空间的框架下，我们可以推广经典代数学中群的概念而得到重群的概念，并得到其相应的代数结构.

定义2.2 设$\widetilde{G}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}G_i$为一个具有运算集$O(\widetilde{G})=\{\times_i, 1\leq i\leq n\}$的封闭重空间. 若对任意整数$i, 1\leq i\leq n$, $(G_i;\times_i)$ 是一个群，且对$\forall x,y,z\in\widetilde{G}$和任意两个运算"$\times$" and "$\circ$"，$\times\neq\circ$，存在一个运算，例如$\times$，对"$\circ$"满足分配律，即

$$x\times(y\circ z)=(x\times y)\circ(x\times z);\quad (y\circ z)\times x=(y\times x)\circ(z\times x),$$

只要其中的运算结果存在，则称$\widetilde{G}$为一个n-重群.

同样，我们可以定义n-重群的子重群、正规子重群等概念，进而得到群论中一些经典结果的推广，详见文献[4]. 类似地，我们还可以进一步引进重环、重向量空间的概念，进而推广环、线性空间理论中一些著名结果.

定义2.3 设$\widetilde{R}=\bigcup\limits_{i=1}^{m}R_i$为一个完备的$m$-重空间，且对任意整数$i,j,\ i\neq j, 1\leq i,j\leq m$, $(R_i;+_i,\times_i)$为一个环且对任意元$\forall x,y,z\in\widetilde{R}$，只要相应的运算结果均存在，则有

$$(x+_i y)+_j z=x+_i(y+_j z),\quad (x\times_i y)\times_j z=x\times_i(y\times_j z),$$

$$x\times_i(y+_j z)=x\times_i y+_j x\times_i z,\quad (y+_j z)\times_i x=y\times_i x+_j z\times_i x,$$

则称$\widetilde{R}$为一个m-重环. 若对任意整数$i, 1\leq i\leq m$, $(R;+_i,\times_i)$是一个域，则称$\widetilde{R}$为一个m-重域.

定义2.4 设$\widetilde{V}=\bigcup\limits_{i=1}^{k}V_i$ 为一个完备的m-重空间，其运算集合为$O(\widetilde{V})=\{(\dot{+}_i,\cdot_i)\mid 1\leq i\leq m\}$，$\widetilde{F}=\bigcup\limits_{i=1}^{k}F_i$为一个重域，其运算集合为$O(\widetilde{F})=\{(+_i,\times_i)\mid 1\leq i\leq k\}$. 若对任意整数$i,j,\ 1\leq i,j\leq k$及任意元$\forall\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\widetilde{V}$, $k_1,k_2\in\widetilde{F}$,只要对应的运算结果存在，则

(*i*) $(V_i;\dot{+}_i,\cdot_i)$为域F_i上的向量空间，其向量加法为"$\dot{+}_i$"，标量乘法为"$\cdot_i$"；

(*ii*) $(\mathbf{a}\dot{+}_i\mathbf{b})\dot{+}_j\mathbf{c}=\mathbf{a}\dot{+}_i(\mathbf{b}\dot{+}_j\mathbf{c})$;

(*iii*) $(k_1+_i k_2)\cdot_j\mathbf{a}=k_1+_i(k_2\cdot_j\mathbf{a})$;

则称$\widetilde{V}$为重域$\widetilde{F}$上的k重向量空间，记为$(\widetilde{V};\widetilde{F})$.

§3. 几何Smarandache重空间

几何重空间系在重度量空间基础上产生，首先引入重度量空间的概念.

定义3.1 一个重度量空间$\widetilde{M}$定义为并集$\bigcup\limits_{i=1}^{m}M_i$，使得对任意整数$\forall i, 1\leq i\leq$

m，M_i是度量为ρ_i的度量空间.

定义3.2（[1][5]）一个公设称为*Smarandache*否定的，若其在同一个空间中同时表现出成立或不成立，或至少以两种以上方式表现不成立.

一个含有Smarandache否定公设的几何称为*Smarandache*几何.

作为一般性地构造2-维Smarandache几何，文献[3]引入了地图几何的概念. 所谓地图M 就是图在一个可定向或不可定向曲面上的2-胞腔嵌入. 利用置换群理论中的一些结果和地图的几何特性，Tutte曾于1973年提出地图的一种代数定义，为地图的组合研究打下了基础([2][4]).

定 义3.3 在地图M每个顶点$u, u \in V(M)$上赋予一个实数$\mu(u), \mu(u)\rho_M(u)(mod 2\pi)$，称$(M,\mu)$为一个地图几何，$\mu(u)$为点$u$的角因子函数. 视允许或不允许曲面上的曲线穿过某一个或某几个面而称该地图几何无边界或有边界. 视角因子函数规定的弯折角度大于π 等于π或小于π 分别称点u为椭圆点、欧氏点和双曲点.

定理3.1([3-4]) 有界、无界地图几何中均存在悖论几何、非几何、反射影几何和反几何，即存在Smarandache几何.

椭圆点、欧氏点和双曲点在3维空间中均是可以实现的，这里点的实现有别于欧氏空间的情形，即不一定是平直的，除非该点就是欧氏点. 所以地图几何提供了在平直空间基础上构造弯曲空间的一种方法. 便于理解，我们介绍平面地图几何的情形. 在这种情形，不仅可以在顶点上赋予角因子函数，还可以要求连接顶点之间的边是一个连续函数，这样对进一步理解平面上代数曲线十分有意义. 比如在平面地图几何中有这样的结论：平面地图几何无穷直线不穿过地图顶点或穿过的顶点为欧氏点和平面地图几何中允许1-边形和2-边形存在等.

§4. 伪度量空间几何

地图几何的思想实际上可以一般地定义于一个度量空间上，即在该度量空间的每个点上赋予一个n-维向量而建立伪度量空间几何.

定义4.1 设U为一个度量为ρ的度量空间，$W \subseteq U$. 对任意$\forall u \in U$，若存在一个连续映射$\omega : u \to \omega(u)$，这里，对任意整数$n, n \geq 1$，$\omega(u) \in \mathbf{R}^n$使得对任意的正数$\epsilon > 0$，均存在一个数$\delta > 0$和一个点$v \in W$, $\rho(u-v) < \delta$使得$\rho(\omega(u)-\omega(v)) < \epsilon$. 则若$U = W$，称$U$为一个伪度量空间，记为$(U,\omega)$；若存在正数$N > 0$使得$\forall w \in W$, $\rho(w) \leq N$，则称U为一个有界伪度量空间，记为(U^-,ω).

注意ω是角因子函数时，从伪度量空间我们得到Einstein的弯曲空间. 为便于理解，我们讨论伪平面几何且ω为角因子函数的情形，有下面一个简单的结论([4]).

定理4.1 在一个伪平面$(\sum,\omega)$上，若不存在欧氏点，则$(\sum,\omega)$其每个点均为椭圆点或每个点均为双曲点.

对于平面代数曲线，则有如下结果.

定理4.2 在伪平面$(\sum,\omega)$上存在代数曲线$F(x,y)=0$经过区域D 中的点(x_0,y_0)当且仅当$F(x_0,y_0)=0$且对任意$\forall(x,y)\in D$，

$$(\pi-\frac{\omega(x,y)}{2})(1+(\frac{dy}{dx})^2)=sign(x,y).$$

在定义4.1中，取$U=W=M^m$这里M^m为一个m-流形，对任意点$\forall\overline{u}\in M^m$，取$n=1$且$\omega(u)$为一个光滑函数. 则得到流形$M^m$ 上的伪流形几何(M^m,ω). 对$\forall\overline{x}\in M^m$，取$\omega(\overline{x})=F(\overline{x})$，这里$F(\overline{x})$为$TM^m$上的Minkowski范数，则伪流形几何$(M^m,\omega)$是一个Finsler 流形，特别地，如果取$\omega(\overline{x})=g_{\overline{x}}(y,y)=F^2(x,y)$，则$(M^m,\omega)$就是Riemann流形. 这样，我们就得到下述结论.

定理4.3 伪度量空间几何(M^m,ω)，一般地，Smarandache几何中包含Finsler几何，从而包含Riemann几何.

参考文献

[1] L.Kuciuk and M.Antholy, An Introduction to Smarandache Geometries, *Mathematics Magazine, Aurora, Canada*, Vol.12(2003)

[2] Y.P.Liu, *Enumerative Theory of Maps*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/ Boston/ London, 1999.

[3] L.F.Mao, *On Automorphisms groups of Maps, Surfaces and Smarandache geometries*, *Sientia Magna*, Vol.1(2005), No.2, 55-73.

[4] L.F.Mao, *Smarandache multi-space theory*, Hexis, Phoenix, AZ，2006.

[5] F.Smarandache, Mixed noneuclidean geometries, *eprint arXiv: math/0010119*, 10/2000.

[6] F.Smarandache, A Unifying Field in Logic: Neutrosophic Field, *Multi-Valued Logic*, Vol.8, No.3(2002)(special issue on Neutrosophy and Neutrosophic Logic), 385-438.

Smarandache 几何学的介绍

L.Kuciuk[1] M.Antholy[2]

(1. University of New Mexico, NM 87301, Email: research@gallup.unm.edu.)

(2. University of Toronto, Toronto, Email: mikesntholy@yahoo.ca.)

摘要. 本文对令人激动的几何学做了简单的陈述，并为一个特别的几何图形建立了模型.

引言： 所谓Smarandache否认公理是指在同一空间能够至少用两种方法表现（即，被验证和不被验证，或仅仅不验证只是以多重不同的方法）.
Smarandache几何是有至少一个Smarandache否认公理的几何（1969）.

定义： 记在Smarandache几何中用s-点，s-线，s-平面，s-空间，s-三角形分别对应点，线，平面，空间，三角形等以示同其它几何图形的区别.

应用：为什么有这些混合几何呢？因为现实中确实不存在被分离的均匀空间，而是它们的混合，被相互连接，每一个都有不同的结构.

在欧儿里得几何中，也称寓言几何，第五个欧儿里得假设是过已给的直线外一点仅存在一条平行线和已给直线平行，它被保留下来或被证明.
在Lobachevsky-Bolyai-Gauss几何中，也称双曲几何，第五个欧儿里得假设用下面的方法被否定了：过已给直线外一点存在无穷多的平行线和已给直线平行.

因此，作为一个特殊的情况，欧儿里得，Lobachevsky-Bolyai-Gauss，和Riemannian几何可以被Smarandache几何在同一空间中结合在一起. 这些剩下的几何部分归为欧儿里得，部分是非欧儿里得. Howard Iseri[3]为这一特殊的Smarandache几何构建了一个模型，这里欧儿里得第五假设在同一空间被不同的表述所代替，即不论一条平行线，没有平行线，还是无穷多平行线都经过已给的一点，所有的线经过已给点是都是平行线.

考虑欧儿里得几何的Hilbert21公理. 如果Smarandache否认公理一，二，三，等等，直到对应的21公理，则我们得到：
$C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_{21} = 2^{21} - 1 = 2,097,151$
不管数字有多大，Smarandache几何都对，因为一个公理可以以多重方法成为Smarandache否认公理.
类似地，Smarandache否认公理也应用于投影几何，等等.

似乎Smarandache几何与相对论理论联系着（因为它们都包括子空间

的Riemannian几何），同样也和平行宇宙联系着（因为它们把分离的空间结合成只有一个）.

Smarandache复制是一个n-维复制满足Smarandache几何.

例子： 作为一个特殊情况，Smarandache复制在Howard模型[3]中作为2维复制，此模型由等边三角形组成，满足每个顶点分别对应5（表示椭圆形的），6(表示欧儿里得形的)，7(表示双曲线形的)三角形，两两共有一边. 或者，更一般地，一个n-维复制建立在n-维子复制（两两共有至多m-维边界，其中$m < n$）之上满足Smarandache几何.

一个特殊Smarandache几何的模型： 让我们考虑一个欧儿里得平面(α)和其中的三个非共线的已知点A, B和C. 我们定义s-点和s-线与所有普通的欧儿里得点，线相同，这些线过且仅过A, B或C中的一个. 因此所形成的几何是Smarandache几何因为两个公理是Smarandache否认公理：
a）通过已给直线外一点仅有一条平行线这个公理现在已被两个表述所替代：一条平行线，和没有平行线.
例子：
采用欧儿里得线AB（根据定义这不是一个s-线，因为在已给的三个点A, B, C中经过了两个），和经过s-点C的s-线记为（c），以欧儿里得的观点，两者平行：
-通过任何不在AB上的s-点存在一条平行于（c）的s-线.
-通过任何其它在欧儿里得线AB上的s-点不存在和（c）平行的s-线.
b）通过任何不同两点存在一条经过它们的直线这个公理现在被下面的所替代：一条s-线，和没有s-线.
例子：
使用相同的记号：
-通过任何不在欧儿里得线AB, BC, CA上的不同两s-点存在一条s-线经过它们；
-通过任何在AB上的不同两点不存在s-线经过它们.

杂录： 第一届Smarandache几何国际会议将于2003年5月3号到5号在澳大利亚Queensland 的Griffith大学举行，会议由Jack Allen博士主持.
会议主页在：
http://at.yorku.ca/cgi-bin/amcacalendar/public/display/conference_info/fabz54.
同时也宣传在：
http://www.ams.org/mathcal/info/2003_may3-5_goldcoast.html.

还有一个关于Smarandache几何的俱乐部，网址是：
http://cluds/yahoo.com/clubs/smarandachegeometries, 欢迎大家前来.
更多的信息请看：http://www.gallup.unm.edu/ smarandache/geometries.htm.

参考文献

[1] L.Kuciuk,M.Antholy, On Smarandache Geometries, presented at New Zealand, Mathematics Colloquium, Massey University, Palmerston North, New Zealand, December 3-6, 2001, http: //atlas-conferences.com/c/a/h/f/09.htm; also at the International Congress of Mathematicians(ICM 2002), Beijing, China, 20-28, August 2002, http://www.icm 2002.org.cn/B/Schedule_Section04.htm.

[2] Ashbacher,C., Smarandache Geometries, Smarandache Notions Journal, Vol.8, 212-215, No.1-2-3,1997.

[3] Chimienti,S.and Bencze,M., Smarandache Paradoxist Geometry, Bulletin of pure and Applied Sciences, Delhi, India, Vol.17E, No.1, 123-1124,1998. http://www.gallup.unm.edu/-smarandache/prd-geo1.txt.

[4] Iseri,H, Partially Paradoxist Smarandache Geometries, http://www.gallup.unm.edu/-smarandache/Howard-Iseri-paper.htm.

[5] PlanetMath, Smarandache Geometries, http://planetmath.org/encyclopedia/Smarandache Geometries.html.

[6] Smarandache,F., Paradoxist Mathematics, in Collected Papers(Vol.II), Kishinev University Press, Kishinev, 5-28,1997.

Smarandache几何的一个例子

S.Bhattacharya

(Alaska Pacific University, 4101 University Drive, Anchorage, AK99508)

一个Smarandache几何是指至少包含一个Smarandache否定公理的几何.这个概念是由Florentin Smarandache在1969年发表于Paradoxist Mathematics的文章中提出来的.

我们称一个公理是Smarandache否定的,是指这个公理在同一空间中至少有两种不同的表现形式（即:有效的和无效的,或者仅仅是无效的, 但有多重不同的形式）.一个特殊的情况是:在同一空间中,通过一些Smarandache几何也许可以把欧几里得几何,罗巴切夫斯基-鲍耶-高斯几何和黎曼几何结合在一起.

我们在此给出一个Smarandache几何的简单例子并邀请读者对于可以再创造的数学再给出其它的例子.

我们考虑一个矩形$ABCD$及其内部的点来作为一个几何空间.这个空间中的点就是普通的点,而其中的线是指任一连接此矩形对边的线段.两线平行是指它们没有交点.

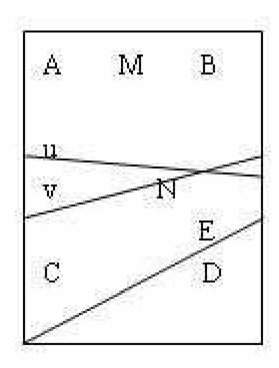


表1：矩形上的一个Smarandache几何

这是一个Smarandache几何,因为它部分双曲非欧几里得,部分欧几里得,并且部分椭圆非欧几里得.

作线CE,取矩形内的一个点N,则存在无穷多条线过点N且平行于CE(即所有经过点N且在线(u)和(v)之间的线),这就是双曲的情形.取另外一个内点$M \in AB$,则只有一条线平行于CE,即线AB,因此只有一条线经过点M,这是欧几里得情形.现在,取另一点D,则没有一条经过D且平行于CE的线因为所有过D的直线都与CE相交,此时为椭圆情形.

所以,欧几里得第五公设是有效的,但也有两次无效.

为什么这些称之为Smarandache几何(SG)? 因为它们可以更好的反应我们的现实, 我们的宇宙并不是只有一个齐性空间, 而是非纯一空间和公理的混合, 每个空间和公理都有各种各样的甚至是相反的性质. SG同时也第一次在几何中引进了否定度, 就像模糊和中智逻辑中的虚假度.

更多Smarandache几何参见:
www.gallup.unm.edu/ Smarandache/geometries.htm.

在它们的几何基础上,通过考虑任一欧几里得第五公设或者任一希尔伯特二十公理的S－否定,读者可以为上述几何构造新的例子.Smarandache几何的例子可以通过邮件发给L.Kuciuk(research@gallup.unm.edu)和中国陕西省西安市西北大学数学系的张文鹏教授(wpzhang@nwu.edu.cn),并在专集上发表.

参考文献

[1] Kuciuk, L.,Antholy,M., An Introduction to the Smarandache Geometries, JP Journal of Geometry ＆Topology, 5(2005), 77-81.

[2] 毛林繁, 映射的自同构群, 曲线和Smarandache几何(部分中国科学院博士后的研究). 北京, 2005.

[3] Smarandache, F., Paradoxist Mathematics(1969), in Collected Papers (Vol.II), Kishinev University Press, Kishinev, 5-28, 1997.

广义Smarandache Palindromes数的密度

Charles Ashbacher

(Charles Ashbacher Technologies Hiawatha, IA 52233 USA, Email: cashbacher@yahoo.com)

Lori Neirynck

(Mount Mercy College, 1330 Elmhurst Drive, Cedar Rapids, IA 52402 USA)

我们把一个前半部分和后半部分相同的整数叫做palindrome数. 例如12321就是一个palindrome数. 容易证明在正整数集合中palindrome数的密度为零.

一个广义的Smarandache Palindromes数（GSP）是具有形如

$$a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}a_na_na_{n-1}\ldots a_3a_2a_1 \text{ 或者 } a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}a_na_{n-1}\ldots a_3a_2a_1$$

整数. 其中$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$可以是一个或多个数字. 例如

10101010 和 101010

就是GSP数，这是因为它们能被分为形式(10)(10)(10)(10) 和(10)(10)(10)而且从中间都可以分成完全相同的两部分.

有一点需要说明的是，每一个整数都可以被看作是一个广义Smarandache Palindromes数，这是因为我们可以把这一整数看作一个整体，例如可将12345写成(12345)，我们忽略这种平凡情形. 于是，一个正规的Palindromes数至少可以分为两个部分.

我们再来看数字100610, 这也是一个GSP数. 因为可以把它分作(10)(06)(10)这样几个部分，而中间的部分是独立的.

很明显，每一个正规的palindrome数是一个GSP数，而GSP数却不一定是palindrome正规的. 也就是说GSP数要比正规的palindrome数多. 因此，GSP数的密度是不小于零的，于是我们考虑如下问题：

正整数中GSP数的密度是怎样的呢？
第一步很容易证明.
定理: 正整数中GSP数的密度大于0.1.
证明：考虑一个任意正整数

$$a_na_{n-1}\ldots a_3a_2a_1a_0$$

和具有形式

$$(k)a_{n-1}\ldots a_3a_2a_1(k)$$

的GSP数，其中对于k有不同的九个选择. 对于每一个选择，都有十分之一的trailing 数字. 因此，GSP数的密度至少是十分之一.

前面定理的简单证明说明了一个基本的思想——如果一个数的首尾两部分相等，那么这个数就是广义Palindromes数并与数值内部的数字无关. 这引导我们得到一般的定理.

定理: 正整数中GSP数的密度近似于0.11.
证明：考虑一个任意正整数

$$a_na_{n-1}\ldots a_3a_2a_1a_0$$

如果首尾数字非零且相等，那么这个数是广义GSP数.正如上一定理所表明的那样，其可能性是0.1.
如果

$$a_n = a_1\ ,\ a_{n-1} = a_0 \text{ 且 } a_n \neq a_0$$

这里a_n是非零的，a_{n-1}与a_0是满足条件的十进制数字.容易计算这个概率为0.009.

如果$a_n = a_2$，$a_{n-1} = a_0$且$a_{n-2} = a_0$,那么这个数就是GSP.这里我们需要选择六个数字来决定其概率，即非零的a_n和不满足前面两种情形条件的数字.容易计算概率值是0.0009.

接下来对于$a_n = a_3$，$a_{n-1} = a_2$且$a_{n-2} = a_1$，$a_{n-3} = a_0$的情形,去掉前面三种情况而满足该条件的概率是0.0000891.

这些概率的和为$0.10 + 0.009 + 0.0009 + 0.0000891$，即0.1099891.

以上的过程可以对首尾部分一直进行下去，但是概率和不会超过0.11.

参考文献

[1] G.Gregory, Generalized Smarandache Palindromes, http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/GSP.htm.

[2] Smarandache, F., Generalized Palindromes, Arizona State University Special Collections, Tempe.

Smarandache n-结构简介

Sukanto Bhattacharya

(Alaska Pacific University, Anchorage, USA)

Mohammad Khoshnevisan

(Griffith University, Queensland, Australia)

1. 简介

在任意域中，一个集合S上的Smarandache n-结构是指S上的一个弱结构$\{W_0\}$，使得存在S的一列真子集$P_{n-1} < P_{n-2} < \ldots < P_2 < P_1 < S$（其中“<”是指“包含于”），它们所对应的结构满足$\{W_{n-1}\} > \{W_{n-2}\} > \ldots > \{W_2\} > \{W_1\} > \{W_0\}$，其中“>”是指“严格强”（也即使说，结构满足更多的公理）.

P一个集合S的真子集，是指P是S的一个子集，但P不等于空集和S，也不是幂等元.

S上的结构是指在给定的运算下S上的最强的结构.

作为一个特殊的情形，一个集合S上的Smarandache 2-代数结构（代数上的二级结构），是S上的一个弱结构$\{W_0\}$，使得存在S的一个真子集P，P内含于一个强结构$\{W_1\}$中.

2. 例子

例如，一个Smarandache半群是这样的一个半群，它拥有一个具有群结构的真子集.

同样，一个Smarandache环是这样的一个环，它拥有一个具有域结构的真子集.

3. 性质

有关于Smarandache模糊半群，广群，循环，双广群，双循环，环，双环，向量空间，半环，半向量空间，非交换半环，双半环，拟环，非交换拟环，双拟环，模糊代数，线性代数的性质以及相关的例子，定理，解决了的和未解决的问题见参考文献.

4. 应用

有关Smarandache广群，拟环，半环在自动机理论，纠错码，S-子双自动机，社会与经济的研究中的应用可在下列e-book 中找到.

5. 会议

国际Smarandache代数结构会议，2004.12.17—12.19，马德拉斯Loyola大学，Chennai - 600 034 Tamil Nadu, 印度.

会议安排：

a) Smarandache型广群，半群，环，域；

b) Smarandache型k-模，向量空间，线性代数，模糊代数.

组织者：数学部主任M. Mary John 博士.

参考文献

[1] W. B. Vasantha Kandasamy, F. Smarandache, Neutrosophic Rings, Hexis, 2006.

[2] W. B. Vasantha Kandasamy, F. Smarandache, N-Algebraic Structures, Hexis, 2005.

[3] W. B. Vasantha Kandasamy, F. Smarandache, Introduction to N-Adaptive Fuzzy Models to Analyze Public Opinion on AIDS, Hexis, 2005.

[4] W. B. Vasantha Kandasamy, Smarandache Algebraic Structures, book series(Vol. I: Groupoids; Vol. II: Semigroups; Vol. III: Semirings, Semifields, and Semivector Spaces; Vol. IV: Loops; Vol. V: Rings; Vol. VI: Near-rings; Vol. VII: Non-associative Rings; Vol. VIII: Bialgebraic Structures; Vol. IX: Fuzzy Algebra; Vol. X: Linear Algebra), 2002-2003.

这些书籍可以从下面的科学数字图书馆下载：

www.gallup.unm.edu/ ∼ smarandache/eBooks-otherformats.htm

中智学介绍

Vic Christianto

(Merpati Building, Jakarta, Indonesia)

Mohammad Khoshnevisan

(Griffith University, Queensland, Australia)

在这篇文章中，我们给出中智逻辑，中智集合，中智统计和中智概率的一个简短的介绍，这些都基于中智哲学；中智哲学是作为辩证法的推广的一个新哲学分支，与实证主义有关.

1. 中智学的简短定义

1.1 **中智逻辑**为现有的许多种逻辑学的统一给出了一个一般性的框架，例如模糊逻辑(特别是直觉主义模糊逻辑)，次协调逻辑，直觉主义逻辑等等. 中智逻辑的主要思想是将所考察的的逻辑判断在一个三维中智空间刻画出来，该空间的三个维度分别表示所考察判断的真(T)，假(F)和不确定(I)，在这里T，I，F是实$]^{-}0, 1^{+}[$的标准的或非标准的子集，且不必考虑这些子集间的联系.
在软件开发中，可用标准单位区间$[0, 1]$.

T, I, F是独立的量，这就为不完全信息(此时它们和的上界< 1)，超一致信息和矛盾信息(此时它们和的上界> 1)，或者完全信息(此时它们的和1)的选择留下余地.

举一个例子:一个判断可以$[0.4, 0.6]$为真的，0.1或者$(0.15, 0.25)$为不确定的，而0.4或者0.6为假的.

1.2 **中智集**. 设U为一个事件的全空间，M为U的子集. U中的元素x关于M记为x(T, I, F)，且以如下的方式属于M：t% 为真, i%为不确定，f%为假, 在此t，i，f分别取值于T, I, F.

从统计的角度看，T, I, F是子集，从动态的角度看T, I, F是依赖于许多已知或未知变量的函数/算子.

中智集合是对模糊集合（特别是直觉模糊集），次协调集，直觉集等的推广.

1.3 **中智概率**是对经典概率和非精确概率的一个推广；在非精确概率中事件发生的可能性，t%为真—t取值于T，i%不确定—i取值于I，f%为假，f取值于F.

在经典概率中$n_sup <= 1$, 然而在中智概率中$n_sup <= 3^{+}$.

在非精确概率中: 事件发生的可能性不是一个数，而是$[0, 1]$的一个子集T，其补集F假定为其对立事件发生的可能性（也是单位区间$[0, 1]$的一个子集）；在非精确概率中没有不确定子集I.

1.4 **中智统计**是对中智概率刻画的事件的分析.

刻画随机变量的中智概率的统计量x称为中智分布：$NP(x) = (T(x), I(x), F(x))$, 在此T(x)表示取值为$x$的概率, $F(x)$表示取值非x的概率, $I(x)$表示值x的不确定性概率.

1.5 **中智哲学**是哲学的一个新分支，它研究中立性的起源、本质和范围，同时也研究它们与不同观念范围的交互关系.

中智哲学是由F.Smarandache 在1995年提出.

这一理论研究$< A >$及其反面或否定$< Anti-A >$和“中智性”范围的各个概念和思想(即介于两个极端之间的概念和思想, 它们既不支持$< A >$也不支持$< Anti-A >$). $< Neut-A >$与$< Anti-A >$的思想结合起来就被认为是$< Non-A >$.

根据这一理论任一概念$< A >$由$< Anti-A >$及$< Non-A >$概念平衡趋于中智—作为一种平衡状态.

在经典的方法下$< A >$, $< Neut-A >$, $< Anti-A >$是两两互不相交的.

但是，大部分情况下概念之间的界限是含糊的,不确定的, 按照复合三段论, $< A >$, $< Neut-A >$, $< Anti-A >$(当然包括$< Non-A >$)两两之间也有相同的部分是可能的.

中智哲学是中智逻辑, 中智集和用于工程应用(尤其是用于软件和信息合成), 医药, 军事, 控制论以及物理学的中智概率和中智统计的基础.

2. 可供研究的中智学课题：

我们鼓励中国的读者研究如下课题：

—中智拓扑学，包括中智矩阵空间和光滑拓扑空间
—中智数与算术运算，包括中智数的排序.
—中智粗糙集
—中智关系结构，包括中智关系等式，中智相似关系，和中智序.
—中智几何
—中智概率
—中智逻辑运算，包括n-范数，n-协范数，中智蕴涵式和中智量词
—中智化测度
—中智化技巧
—中智测度与中智积分
—中智多值映射
—中智微积分
—中智数学形态学
—中智代数结构
—中智模型
—中智认知图
—中智矩阵
—中智双矩阵
—中智图
—中智融合规则
—中智关系图

—应用：中智关系数据库，中智图像处理，中智语言变量，中智决策与优先结构，中智专家系统，中智可靠性理论，
关于电子商务和电子学习的中智计算机软件技术.

参考资料

关于中智学的电子图书：

[1] W. B. Vasantha，Kandasamy, F. Smarandache, Fuzzy Cognitive Maps and Neutrosophic Cognitive Maps, Xiquan, 2003.

[2] W. B. Vasantha Kandasamy, F. Smarandache, Analysis of Social Aspects of Migrant Labourers Living with HIV/AIDS Using Fuzzy Theory and Neutrosophic Cognitive Maps(translation of the Tamil interviews by M.Kandasamy).

[3] W. B. Vasantha Kandasamy, Smarandache Neutrosophic Algebraic Structures.

[4] W. B. Vasantha Kandasamy, F. Smarandache, Basic Neutrosophic Algebraic Structures and Their Application to Fuzzy and Neutrosophic Models.

[5] W. B. Vasantha Kandasamy, F. Smarandache, Fuzzy Relational Maps and Neutrosophic Relational Maps.

[6] W. B. Vasantha Kandasamy, F. Smarandache, Neutrosophic Rings.

[7] Sushnosti Neytrosofii(Russian), A Unifying Field in Logics: Neutrosophic Logic. Neutrosophy, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability(Third edition).

[8] Proceedings of the First international Conference on Neutrosophy, Neutrosophic Logic, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability and Statistics.

[9] C. Ashbacher, Introduction to Neutrosophic Logic.

[10] H. Wang, F. Smarandache, Y-Q. Zhang, R. Sunderraman, Interval Neutrosophic Sets and Logic: Theory and Applications in Computing.

[11] F. Smarandache, F. Liu, Neutrosophic Dialogues.

[12] W. B. Vasantha Kandasamy, F. Smarandache, K.Ilanthenral, Introduction to Bimatrices.

[13] W. B. Vasantha Kandasamy, F. Smarandache, K.Ilanthenral, Applications of Bimatrices to some Fuzzy and Neutrosophic Models.

[14] W. B. Vasantha, F. Smarandache, Fuzzy Interval Matrices and Neutrosophic Interval Matrices and Their Applications.

[15] W. B. Vasantha Kandasamy, F.Smarandache, K. Ilanthenral, Introduction to Linear Bialgebra.

[16] W. B.Vasantha Kandasamy, F. Smarandache, Fuzzy and Neutrosophic Analysis of Women with HIV/AIDS.

[17] F. Smarandache, K. Kandasamy, Fuzzy and Neutrosophic Analysis of Periyar's View on Untouchability.

中智学国际会议：

International Conference on Applications of Plausible, Paradoxical, and Neutrosophic Reasoning for Information Fusion, Cairns, Queensland, Australia, 8-11July 2003.

First International Conference on Neutrosophy, Neutrosophic Logic, Set, Probalitity and Statistics, University of New Mexico, Gallup, 1-3 December, 2001.

关于中智学的博士学位论文：

Sukanto Bhattacharya, Utility, Rationality and Beyond? From Finance to Informational Finance (using Neutrosophic Probability), Bond University, Queensland, Australia, 2004.

Haibin Wang, Study on Interval Neutrosophic Set and Logic, Georgia State University, Atlanta, USA, 2005.

参考文献

[1] F.Smarandache. Only problems, not Solutions. Chicago: Xiquan Publ. House, 1993.

[2] 潘承洞,潘承彪. 解析数论基础. 北京：科学出版社, 1991.

[3] Ibstedt. Surfinig On the Ocean of Numbers- A Few Smarandache Notions and Similar Topics. New Mexico: Erhus University Press, USA,

[4] Tom M.Apostol. Introduction to Analytic Number Theory. New York: Springer-Verlag, 1976.

[5] F.Mertens. Ein Beitrag Zur Analytischen Zahlentheorie. Crelle's Journal, 78(1874), 46-62.

[6] TG.H.Hardy, S.Ramanujan. The normal number of prime factors of a number n. Quartly Journal of Mathematics, 48(1917), 76-92.

[7] Jason Earls. A note on the Smarandache divisors of divisors sequence and two similiar sequences. Smarandche Notions Journal 14(2004), 274-275.

[8] R.L.Duncan. Application of Uniform Distribution to the Fibonacci Numbers. The Fibonacci Quarterly, 5(1967), 137-140.

[9] L.Kuipers. Remark on a paper by R.L. Duncan concering the uniform distribution mod 1 of the sequence of the Logarithms of the Fibonacci numbers. The Fibonacci Quarterly, 7(1969), 465-466.

[10] H.London, R. Finkelstein. On the Fibonacci and Lucas numbers which are perfect powers. The Fibonacci Quarterly, 7(1969), 476-481.

[11] W.P.Zhang. Some identities involing the Fibonacci numbers. The Fibonacci Quarterly, 35(1997), 225-229.

[12] Jozsef Sandor. On an generalization of the Smarandache function. Note Numb.Th.Diser.Math, 5(1999), 41-51.

[13] Maohua Le. On the pseudo-Smarandache squarefree function. Smarandache Notions Journal, 13(2002), 229-236.

[14] Jozsef Sandor. On a dual of the Pseudo-Smarandache function. Smarandache Notions, 13(2002), 18-23.

[15] D.R.Heath Brown. Ibid. III. Journal of the London Mathematical Society, 20(1979), 177-178.

[16] B.Mihaly, T.Lucian(Eds.). Some notions and questions in number theory, Vol 2. http://www.gallup.unm.edu/ smarandache/SNAQINT2.TXT.

[17] Maohua Le. Two formulas for smarandache LCM ratio sequences. Smarandache Notions Journal, 14(2004), 183-185.

[18] C.Ashbacher. Some Properties of the Smarandache-Kurepa and Smarandache-Wagstaff Functions. Mathematics and Informatics Quarterly, 7(1997), 114-116.

[19] A.Begay. Smarandache Ceil Functions. Bulletin of Pure and Applied Sciences, 16(1997), 227-229.

[20] F.Mark, M.Patrick. Bounding the Smarandache function. Smarandache Notions Journal, 13(2002), 37-42.

[21] Kevin Ford. The normal behavior of the Smarandache function. Smarandache Notions Journal, 10(1999), 81-86.

[22] P.Erdös. Problem 6674. Amer. Math. Monthly, 98(1991), 965.

[23] J.Sandor. On a inequality for the Smarandache function. Smarandache Notions Journal, 10(1999), 125-127.

[24] W.P.Zhang. On the symmetric sequence and its some properties. Smarandache Notions Journal, 13(2002), 150-152.

[25] T.M.Apostol. Mathematical analysis, 2nd ed. Addison Wesley Publishing Co., Reading, Mass, 1974.

[26] M.Farris, P.Mitchell. Bounding the Smarandache function. Smarandache Notions Journal, 13(2002), 37-42.

[27] Y.X.Wang. On the Smarandache function. Research on Smarandache problems in number theory, II(2005), 103-106.

[28] C.D.Yang, D.S.Liu. On the mean value of a new arithmetical function. Research on Smarandache problems in number theory, II(2005), 75-78.

[29] J.Sandor. On certain generalizations of the Smarandache function. Smarandache Notions Journal, 11(2000), 202-212.

[30] M.H.Le. A conjecture concerning the Smarandache dual function. Smarandache Notions Journal, 14(2004), 153-155.

[31] F.Mark, M.Patrick. Bounding the Smarandache function. Smarandache notions journal, 13(2002).

Research on Smarandache Problems

Yi Yuan
Research Center for Basic Science
Xi'an Jiaotong University
Xi'an, Shaanxi, 710049
P.R.China

Kang Xiaoyu
Editorial Board of Journal of Northwest University
Northwest University
Xi'an, Shaanxi, 710069
P.R.China

责任编辑：马金萍
封面设计：潘晓玮



Research on Smarandache Problems


ISBN 1-59973-016-2
53995>
9 781599 730165